知識天地

常均曲率曲面

梁惠禎副研究員（數學研究所）

考慮$\mathbb{R}^3$中之曲面S，過S上某點之所有曲線中，有兩曲線分別具最大及最小之之曲率κ_1、κ_2，稱其平均值$(\kappa_1+\kappa_2)/2$為S在該點之均曲率。若S上所有點都具有相同之均曲率，則稱S為常均曲率曲面；球面是廣為人知的例子。常均曲率曲面緣起於等周界問題。本文將分別探討無邊界及有邊界之曲面。有邊界之曲面又分兩類討論：給定邊界曲線者、給定邊界與支撐面接觸角之毛細曲面。

球面上的點另具重要性質：$\kappa_1=\kappa_2$。一般曲面S上具此性質的點稱為umbilical point (臍點)。若S的每一點都為umbilical point，則稱S為umbilical。第III節中將論及常均曲率曲面與umbilical曲面之可能關聯。

I. 緣起。手執切面為圓的吸管，置其一端Γ_1入肥皂溶液後抽出，有一平坦之肥皂膜附著於Γ_1，為一圓盤。於吸管另一端Γ_2灌入空氣，則圓盤變形為附著於Γ_1之肥皂泡。以一手指底於Γ_2內部，使空氣無從逃逸，則此肥皂泡成形為spherical cap。稍事擾動肥皂泡使之變形但仍附著於Γ_1，且擾動過程中一手指始終底於Γ_2內部，則停止擾動後，肥皂泡復為spherical cap。

肥皂泡可視為分隔兩均勻介質之界面。在無重力狀態，界面之能量與面積成正比，而肥皂泡取得最小能量。上述肥皂泡的建構，另受制於兩個因素：肥皂泡之邊界固定為Γ_1，且肥皂泡與吸管所包夾的空氣量為固定。在這兩個限制下擾動曲面，肥皂泡取得面積的極小值。因此肥皂泡是下述變分問題的解，其解為spherical cap：

問題1：給定常數V及平面P上之圓Γ。通過Γ且與P包夾體積V的所有曲面中，何者面積最小?

在前述實驗，如果持續灌空氣入吸管，肥皂泡終將脫離吸管，成為完整球面。此時，肥皂泡滿足的限制僅剩一個，在體積限制下要取得面積之最小值。換言之，球面是下述古典等周界問題的解：

問題2：體積固定的所有封閉曲面中，何者面積最小?

將面積視為曲面之函數，考慮體積維持恆定之曲面微小變動，則面積函數針對這些變動之臨界點為常均曲率曲面。換一觀點來看，考慮分隔兩介質之界面S，忽略S的厚度，界面S承受之內外壓力差P_e-P_i與曲面張力γ成正比，而S之形狀由Laplace equation決定：P_e-P_i=$2H\beta$，其中H為S之均曲率，β是介質所決定之常數；當壓力恆定，S之均曲率為常數。肥皂膜、肥皂泡及毛細曲面皆屬此型界面。因此，我們把上述二問題分別轉化如下:

問題1.1: 給定常數H及封閉曲線 Γ，通過Γ且均曲率為常數H之曲面是否存在? 是否不只一個?

問題2.1: 封閉的常均曲率曲面一定是球面嗎?

II. 先看問題2.1。1853年J.H. Jellet 證明球面是唯一的star-shaped常均曲率曲面。1900年H. Liebermann證明卵形的常均曲率曲面必為球面。半個世紀後，H. Hopf賦與常均曲率曲面一holomorphic differential 2-form，於1951年證明：

定理1. genus為0的封閉常均曲率曲面必為球面。

1956至1962年間，A.D. Alexandrov證明：

定理2. 嵌入的 (embedded) 封閉常均曲率曲面必為球面。

Alexandrov的證明，結合曲面對平面的反射及橢圓方程的maximum principle，至今仍是微分幾何及偏微分方程領域之重要技巧。1984年J.L. Barbosa及M. do Carmo證明：

定理3. 穩定的封閉常均曲率曲面必為球面。

直至八零年代，球面是唯一為人所知的封閉常均曲率曲面。1986年，H.C. Wente證明某個常均曲率immersed環面的存在性，石破天驚，激起了尋找封閉常均曲率曲面之風潮，至今未衰。而Wente的技巧，建立起常均曲率曲面與可積系統之關聯，致使常均曲率環面能被深入探討。

1991-1992年，N. Kapouleas對任意genus構造出封閉的immersed常均曲率曲面。Kapouleas黏合球面及Delaunay旋轉曲面 (1838年C.E. Delaunay發現一族常均曲率旋轉體，包括圓柱面、懸垂面、unduloid、nodoid)，其關鍵是要在黏合處做擾動使其平滑；此構造方法迄今仍廣被採用。近日，另有學派結合loop groups與可積系統的理論，發展出DPM method以構造常均曲率曲面。諸多網站以電腦繪圖展示相關的豐碩成果，譬如http://www.gang.umass.edu。

III. 回到問題1.1，給定常數H及封閉曲線Γ，要尋找曲面M=X($\overline{B_1}$)滿足下述事項，其中 X:($\overline{B_1}$)→$\mathbb{R}^3$, X=X(u,v)，B_1為$\mathbb{R}^2$中之單位圓：

$$\begin{cases} \Delta X = 2H\,(X_u \times X_v) \quad \text{on } \mathrm{B}_1, \\ |X_u|^2 - |X_v|^2 = \langle X_u, X_v\rangle = 0 \text{ on } \mathrm{B}_1, \\ X\colon \partial B_1 \to \Gamma \quad \text{a homeomorphism.} \end{cases}$$

J. Douglas及T. Rado處理了H=0的情況，Douglas並因此而於1936年獲頒費爾茲獎。五零年代，E. Heinz開始探討H≠0的情況，至七零年代，多位數學家考慮變分問題的解而於H夠小時尋獲曲面M=X($\overline{B_1}$)：在H=0時，以Dirichlet integral

$$D(X) = \frac{1}{2}\int_{B_1} |\nabla X|^2 du dv$$

取代面積 $\mathrm{A}(X) = \int_{\mathrm{B}_1} |X_u \times X_v| du dv$ (因為$\mathrm{A}(X) \le D(X)$)，在H≠0時，考慮

$$D_H(X) = D(X) + \frac{2H}{3}\int_{\mathrm{B}_1} \langle X_u \times X_v, X\rangle du dv,$$

並考慮由定義於B_1且通過Γ之immersions所組成之族群C(Γ)；與C(Γ)之成員相較，曲面M=X($\overline{B_1}$)最小化$D_H(X)$。$D_H(X)$的第二項中，$\frac{1}{3}\int_{\mathrm{B}_1} \langle X_u \times X_v, X\rangle du dv$ 是曲面X(u,v)相對於原點的algebraic volume，而2H可視為為Lagrange multiplier (但未給定C(Γ)成員之體積值)。M=X($\overline{B_1}$)是藉由變分學之direct method尋獲，M=X($\overline{B_1}$)是$D_H(X)$之minimizing sequence收斂所至之極限；此中關鍵是要利用C(Γ)的緊緻性及$D_H(X)$之lower semicontinuity證明minimizing sequence收斂。

八零年代，H. Brezis，J.M. Coron及M. Struwe處理C(Γ)在mountain pass level的緊緻性，確認了問題1.1的解若存在必定不唯一：若$D_H(X)$在C(Γ)能被X最小化，則在C(Γ)中必定存在另一不穩定的解；譬如，若Γ是圓，通過Γ的常均曲率曲面至少有圓盤及一大一小兩個spherical caps。事實上，即使Γ是圓，對問題1.1的解，我們所知仍甚少。有兩個確認的事實：

1.通過圓的緊緻umbilical曲面必為圓盤或spherical caps。

2.通過圓的緊緻旋轉曲面必為圓盤或spherical caps。

另外，Kapouleas於1991年證明存在通過圓而不具旋轉對稱之緊緻常均曲率曲面；此曲面有自相交(self-intersections)，genus大於1，坐落於邊界平面所決定的某半空間。迄今未有該曲面之電腦繪圖，此與封閉常均曲率曲面電腦繪圖量之豐沛大相逕庭。衡諸這些事實，對照前述三定裡，我們做以下三猜測:

猜測1. 通過圓的immersed常均曲率曲面，若genus為0，必為umbilical。

猜測2. 通過圓的常均曲率曲面，若為嵌入的，必是umbilical。

猜測3. 通過圓的常均曲率曲面，若為穩定，必是umbilical。

IV. 可將問題1.1考慮的曲面限制為平面區域上的函數圖形，改述問題如下：

問題1.2: 給定常數H及空間中之封閉曲線Γ，是否存在函數圖形通過Γ且均曲率為H?

此問題中之Γ必為某平面曲線上之函數圖形，因此可重新陳述問題如下：

問題1.3: 給定常數H，定義域Ω⊂$\mathbb{R}^2$，ϕ:∂Ω→$\mathbb{R}$，尋找平滑函數u使得

$$\operatorname{div}\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = 2H \ \text{ on } \ \Omega \qquad (1)$$

$$u = \varphi \ \text{ along } \ \partial\Omega \qquad (2)$$

其中∇及div分別為$\mathbb{R}^2$中之梯度及divergence算子。

用divergence theorem積分(1)，得到此問題有解之必要條件：$|H| \le \frac{|\partial\Omega|}{2|\Omega|}$，其中$|\partial\Omega|$及$\Omega$分別為$\partial\Omega$的長度及$\Omega$的面積。當$\Omega$為半徑$r$的圓，此必要條件是$|H|\le 1/r$。事實上，R. Finn於1965年證明：

定理4.若$H\neq 0$且Ω包含半徑$1/|H|$的圓，此問題的解必為半球。

R. Finn也同時證明了下述結果：

定理5. 當$H=0$，問題1.3對任意連續邊界值ϕ都有解之充要條件是Ω為凸。

對一般H，J. Serrin於1969年證明:

定理6. 設Ω為有界凸域。問題1.3對任意連續邊界值ϕ都有解之充要條件是平面曲線$\partial\Omega$之曲率$\kappa\ge 2H$。

在偏微分方程領域，問題1.3因其邊界條件(2)而被歸類為Dirichlet problem。因(1)為擬線性二階橢圓方程，通常運用Leray-Schauder theory求解：先假設解u存在，估計$|u|$及$|\nabla u|$，若兩者皆存在與u無關的上界，則解存在。

V. 現考慮毛細曲面。無重力狀態下，將水平切面為Ω的試管鉛直插入溶液槽，溶液因毛細作用而附著於試管上升，形成毛細曲面S，具常均曲率，與試管壁相交於一曲線，沿此曲線S與管壁之交角恆常不變。因此，有別於(2)，我們考慮如下之邊界條件

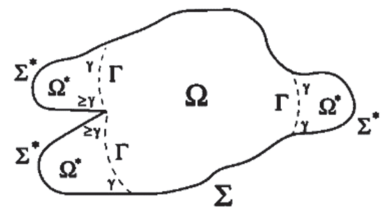
$$\left\langle \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}, \nu \right\rangle = \cos\gamma \ \text{ along } \ \partial\Omega, \qquad (3)$$

其中ν是$\partial\Omega$指向Ω內部之單位法向量。設(1)-(3)有解u，則在試管$\Omega\times$R內，溶液於$(x,y)\in\Omega$點升起的高度是$z=u(x,y)$，而由(3)知u的函數圖形與管壁$\partial\Omega\times\mathbb{R}$之交角恆為$\gamma$。

處理 (1)-(3)解的存在性，端賴E. de Giorgi及其同儕發展出的BV theory。考慮子區域$\Omega^*\subset\Omega$，邊界$\partial\Omega^*=\Gamma\cup\Sigma^*$,其中$\Sigma^*\subset\partial\Omega=\Sigma$，$\Gamma\subset\Omega$是半徑$\frac{|\Omega|}{|\Sigma|}\cos\gamma$的圓弧，在$\Sigma$的平滑點$\Gamma$與$\Sigma$之交角為$\gamma$，而在$\Sigma$的凹角$\Gamma$與$\Sigma$之交角$\ge\gamma$。對此型子區域$\Omega^*$，考慮函數

$$\Phi(\Omega^*;\gamma) := |\Gamma| - |\Sigma^*|\cos\gamma + |\Sigma|\cos\gamma\frac{|\Omega^*|}{|\Omega|}$$

，七零年代Giusti及Finn證得：

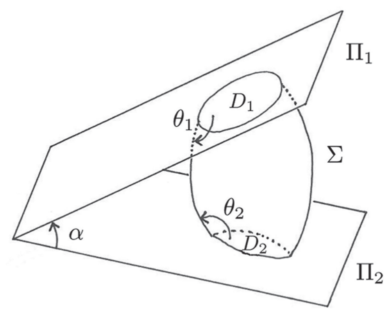


定理7. (1)-(3)解存在之充要條件是此型子區域Ω^*都滿足$\Phi(\Omega^*;\gamma)>0$。

在一般Ω，此型子區域Ω^*為數有限，甚或不存在。若Ω^*不存在，上述充要條件成立，因此解存在；而若Ω^*有數個，則一一計算其Φ值。P. Concus及Finn循此策略證得：

定理8. 若$\partial\Omega$包含某突出的角，角弧度2α，$\alpha+\gamma<\pi/2$，則(1)-(3)無解。

廣義來說，與某支撐面有恆定交角的曲面都被稱為毛細曲面，而稱該交角為接觸角(contact angle)。考慮兩個平面包夾的楔形區域，McCuan及Park分別於1997及2005年證明



定理9. 楔形區域內，嵌入之環形毛細曲面必為球面的一部分。

我們可考慮下述三問題；

問題1：楔形區域或半空間內，是否存在緊緻、immersed且不是部分球面的的毛細曲面?

問題2：楔形區域或半空間內，是否存在緊緻、嵌入且genus≥1的毛細曲面?

問題3：楔形區域或半空間內，穩定之毛細曲面是否必為部分球面？

相關於問題1，Wente於1995年建構了楔形區域內非緊緻的毛細曲面。關於問題2，在接觸角≤π/2的情況，McCuan於1997年證明問題所述之毛細曲面不存在。關於問題1，在接觸角≥π/2且毛細面邊界為嵌入曲線的情況，J. Choe及M. Koiso於2006年證明穩定之毛細面必為球的一部分。三個問題都尚待更完整的解答。