知識天地

橫看成嶺側成峰－組合設計理論趣引

沈灝教授(上海交通大學；2012年12月12日至2013年2月11日於本院數學所訪問)
葉永南研究員(數學研究所)

引言

組合設計理論是離散數學的一個重要分支，是一門將事物按特定要求進行配置並討論其性質的學問，組合設計的歷史可以追溯到遠古。《易•繫辭上》云：“河出圖，洛出書，聖人則之”，用數學語言表述，其中的“洛書”就是一個簡單的組合設計--3階幻方，這是一個由1到9這九個數字組成的3階方陣，它的任意一行、任意一列和任意一條對角線上三個數字之和都等於15：

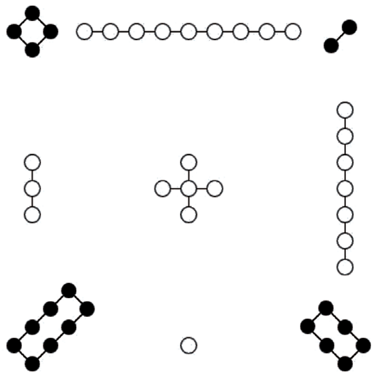

圖1　洛書

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

圖2　三階幻方

長期以來，各種饒有趣味的組合設計問題，以其特有的魅力，吸引了一代又一代青年學子，把他們引領進數學研究的殿堂。

對於組合設計的系統研究，始於上世紀二、三十年代，數理統計中關於試驗方案的設計與分析的需要，給組合設計理論的研究注入了新的動力。

促進組合設計理論研究深入開展的，還有第三個動力，那就是數學自身發展的需求。許多原來各自獨立研究的數學物件，可以用組合設計的概念和語言給予統一表述，並可用組合設計的方法進行統一處理。

組合設計作為組合數學的一個重要領域，充滿朝氣。自上世紀六十年代以來，關於正交拉丁方的Euler猜想、關於區組設計的存在性猜想、關於Kirkman三元系的存在性和Steiner三元系大集的存在性等基本問題和著名難題一個接一個被解決。組合設計的理論與方法在數理統計、運籌學、圖論、改錯碼理論和密碼學等領域中的應用日益廣泛，組合設計理論的研究在近五十年來取得了令人矚目的巨大進展，新的理論和方法不斷創立，應用領域不斷擴大，組合設計的面貌發生了根本性的變化，它在理論上已漸趨成熟。

組合設計理論是一個既有古老歷史淵源而又相對年輕的數學分支，是一個生氣勃勃、廣有前途的研究領域，既有很強的理論性，又有廣泛的應用價值，並且饒有趣味，引人入勝。

在這篇短文中，我們所能做的，只是從組合設計的百花園中採擷幾朵美麗的小花，供有興趣的讀者觀賞和品味。

一、從Steiner三元系談起

在組合設計理論中，最基本的一類設計就是平衡不完全區組設計。

定義1.1.給定正整數v，k與λ，設V為一個v元集，A為由V的若干k元子集(稱為區組)所組成的子集族，若V的任意一對不同元素都恰好同時包含在λ個區組中，則稱序對(V,A)為一個平衡不完全區組設計，簡稱區組設計或BIB設計，記作$B(k,\lambda;v)$

不難驗證，在一個$B(k,\lambda; v)$中所包含的區組個數為

$$b=\lambda v(v-1)/ k(k-1). \qquad (1.1)$$

設x為V中任意元素，則包含x的區組個數為

$$r=\lambda(v-1)/(k-1). \qquad (1.2)$$

由此即得關於BIB設計存在性的下述必要條件：

定理1.1.若B(k, λ; v)存在，則

$$\lambda(v-1)\equiv 0(\mathrm{mod}(k-1)), \qquad (1.3)$$

$$\lambda v(v-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\ k(k-1)). \qquad (1.4)$$

k=3且λ=1時的BIB設計，即B(3,1;v)，叫作v階Steiner三元系，記作STS(v)。

例2.1.令$V=Z_7=\{0,1,2,3,4,5,6\}$，令A由以下7個區組組成：

{0,1,3}, {1,2,4}, {2,3,5},

{3,4,6}, {4,5,0}, {5,6,1}, {6,0,2},

它們構成Z_7上的一個7階Steiner三元系，即STS(7)。

下面給出這個STS(7)的一個幾何解釋：將Z_7中的7個元素看作點，再將7個三元組看作直線：對Z_7中任意元素a和任意一個區組B，如果a∈B，則稱點a在直線B上，或稱直線B經過點a。由此得到一個有趣的幾何結構，它可以由圖3中的Fano構形直觀表示：

它的7個點分別由圖中等邊三角形的重心、三個頂點以及三邊的中點表示，它的7條邊則分別由三角形的三條邊、三條中線以及內切圓的圓周表示。如此簡單的Fano構形，卻有著多種有趣的幾何學與組合論的解釋：可以把它看作一個7階Steiner三元系，也可看作一個迴圈區組設計，還可看作一個2階射影平面，從圖論的角度看，它又可看作一個7階完全圖的三角形分解，真可謂“橫看成嶺側成峰，遠近高低各不同”。由此可見組合設計的概念和理論與眾多學科之間有著深刻的本質聯繫。研究方法的多樣性和應用的廣泛性，預示著組合設計理論的強大生命力和美好前景。

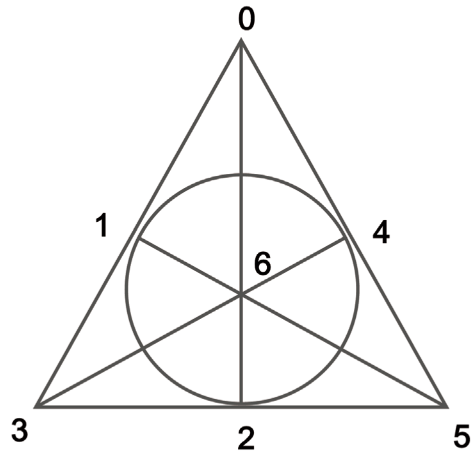

圖3　Fano構形

組合設計理論的第一個基本問題就是BIB設計的存在性問題。條件(1.3)與(1.4)對於B(k,λ;v)的存在性而言是必要的，但不是充分的。1975年，R. M. Wilson證明了下述“漸近存在性定理”：

定理1.2.對給定正整數k和λ，存在常數$v_0=v_0(k,\lambda)$，使當$v\geq v_0$時，B(k,λ;v)存在的必要條件(1.3)與(1.4)也是充分的。

尤為重要的是，Wilson建立了他的“PBD理論”，對組合設計理論的發展，影響深遠。

二、有限射影平面

$v=n^2+n+1$，k=n+1，λ=1時的BIB設計感興趣經簡單計算可知此設計的區組個數$b=v=n^2+n+1$。此時，若將這個設計中的元素稱為點(point)，將區組稱為直線(line)，則得到這樣一個幾何結構：

(1)共有n^2+n+1個點；

(2)共有n^2+n+1條直線；

(3)每一條直線正好經過n+1個點；

(4)經過每一點的直線正好有n+1條；

(5)任意不同的兩點正好同時落在唯一的一條直線上；

(6)任意兩條不同的直線正好有唯一的一個交點。

我們把這個幾何結構叫作n階射影平面。據此定義，前面介紹的7階Steiner三元系就是一個2階射影平面。

當n=q為素數冪時，利用有限域上線性代數理論，我們可以十分容易地構造出q階射影平面。然而當n不是素數冪時，n階射影平面的例子至今連一個都還沒有找到。下面這個問題是一個極富挑戰性的著名難題：

問題2.1.是否存在非素數冪n使n階有限射影平面存在？

10階射影平面的存在性問題曾經是一個長期未獲解決的難題。C. Lam等在1989年成功地證明10階射影平面的不存在性，我們很自然地提出下面這個問題。

問題2.2.是否存在12階射影平面？

三、正交拉丁方

正交拉丁方是組合設計理論的主要研究物件之一。

定義3.1.設S={a_1，a_2，⋯，a_n}為一個n元集合，A為S上的一個n階方陣，如果A的每行每列都是S中n個元素的全排列，則稱A為S上的一個n階拉丁方。

令

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1b} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2b} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{v1} & a_{v2} & \cdots & a_{vb} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

為兩個n階拉丁方，若n^2個序對

（a_{ij}，b_{ij}），$1\leq i,j\leq n$

互不相同，則稱A與B為一對正交的n階拉丁方。

例3.1.設S={0,1,2}，令

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

則A與B是一對正交的3階拉丁方。

當n為奇數或形如4t的偶數時n階正交拉丁方很容易構造，但當n=4t+2時，問題變得十分困難。因此6階正交拉丁方的存在性問題特別引人關注，用趣味數學問題表述，就是Euler 36名軍官問題：

有36名軍官，來自6個團隊，每個團隊6名；具有6種不同的軍銜，每種軍銜6名。問能否將這36名軍官排成一個6行6列的方陣，使得各行各列的6名軍官既來自6個不同的團隊，又具有6種不同的軍銜？

1782年，Euler提出下述猜想：當n為形如4t+2形式的正整數時，n階正交拉丁方不存在。

Euler猜想提出178年之後，Bose、Shrikhande和Parker證明了下述重要定理：

定理3.1(BSP定理)設n為正整數，n≠2,6，則n階正交拉丁方都存在。

1977年，朱烈用和複合方法給出了BSP定理的一個十分簡潔的新證明。

BSP定理對於推動組合設計理論的研究和發展，影響深遠。

例3.3.圖4展示的是E. Paker 於1959年得到的一對10階正交拉丁方：

$$\begin{bmatrix} 0&4&1&7&2&9&8&3&6&5 \\ 8&1&5&2&7&3&9&4&0&6 \\ 9&8&2&6&3&7&4&5&1&0 \\ 5&9&8&3&0&4&7&6&2&1 \\ 7&6&9&8&4&1&5&0&3&2 \\ 6&7&0&9&8&5&2&1&4&3 \\ 3&0&7&1&9&8&6&2&5&4 \\ 1&2&3&4&5&6&0&7&8&9 \\ 2&3&4&5&6&0&1&8&9&7 \\ 4&5&6&0&1&2&3&9&7&8 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0&7&8&6&9&3&5&4&1&2 \\ 6&1&7&8&0&9&4&5&2&3 \\ 5&0&2&7&8&1&9&6&3&4 \\ 9&6&1&3&7&8&2&0&4&5 \\ 3&9&0&2&4&7&8&1&5&6 \\ 8&4&9&1&3&5&7&2&6&0 \\ 7&8&5&9&2&4&6&3&0&1 \\ 4&5&6&0&1&2&3&7&8&9 \\ 1&2&3&4&5&6&0&9&7&8 \\ 2&3&4&5&6&0&1&8&9&7 \end{bmatrix}$$

圖4　一對10階正交拉丁方

下面這個問題至今未獲解決：

問題3.2.是否存在3個兩兩正交的10階拉丁方？

四、Kirkman女生問題

1850年，T.P.Kirkman提出“15名女生問題”：

一位女教師帶領她的15名女學生每天散步一次，每次散步都把學生分成5組，每組3人。問能否設計出這樣一個連續散步一周的方案，使得任意兩名學生都正好有一次同組？用1到15這15個數字代表15位元女生，下面給出這個問題的一個解：

星期日：{1,2,3},{4,8,12},{5,10,15},{6,11,13},{7,9,14};

星期一：{1,4,5},{2,8,10},{3,13,14},{6,9,15},{7,11,12};

星期二：{1,6,7},{2,9,11},{3,12,15},{4,10,14},{5,8,13};

星期三：{1,8,9},{2,12,14},{3,5,6},{4,11,15},{7,10,13};

星期四：{1,10,11},{2,13,15},{3,4,7},{5,9,12},{6,8,14};

星期五：{1,12,13},{2,4,6},{3,9,10},{5,11,14},{7,8,15};

星期六：{1,14,15},{2,5,7},{3,8,11},{4,9,13},{6,10,12}.

設v為3的倍數，(V,A)為一個STS(v)，P為由A中v/3個區組組成的集合，若V中每個元素都正好在P中出現一次，則稱P為一個平行類。若A中全部區組能劃分成(v-1)/2個平行類，則稱(V,A)為一個v階Kirkman三元系，記作KTS(v)。於是上述15女生問題的解就是一個KTS(15)。歷史上著名的“Kirkman女生問題”，就是 Kirkman三元系的存在性問題。D. K. Ray-Chaudhuri與R. M. Wilson於1971年發表論文，宣告Kirkman女生問題的徹底解決，即證明了下述定理：

定理4.1.KTS(v)存在的充分必要條件為

$$v\equiv 3 \pmod 6, \qquad (4.1).$$

這是一個影響深遠的重大成果。中國數學家陸家羲在上世紀六十年代初已獨立得到這一結果。

英國數學家I. Anderson於1997年首先將定理4.1稱為“Ray-Chaudhuri- Wilson-Lu定理”。他指出：“這一結果通常稱為Ray-Chaudhuri與Wilson定理，這是由於他們最先(1971年)發表了一個證明。然而，最近獲知，中國數學家陸家羲至少在此之前六年就已給出一個證明，只是由於文化大革命的原因而未能發表，不過現在它終於用英文發表了。”

陸家羲1935年出生於上海，後來去東北務工和求學。他在大學學的是物理，大學畢業後長期在內蒙古包頭市擔任中學物理教師，不過他的主要興趣一直在組合設計理論上。陸家羲在學術上的主要貢獻有以下三個方面：

1.獨立解決了Kirkman三元系的存在性問題；

2.證明了可分解設計的漸近存在性定理；

3.解決了不相交Steiner三元系大集的存在性問題。

這三項成果都居於組合設計理論中最傑出成就之列。

結語

組合設計理論，這是一座充滿奇花異草的美好園林，足以使觀賞者流連，更能激發起青年人創造的激情，研究數學之理，探求數學之用，感受數學之美。