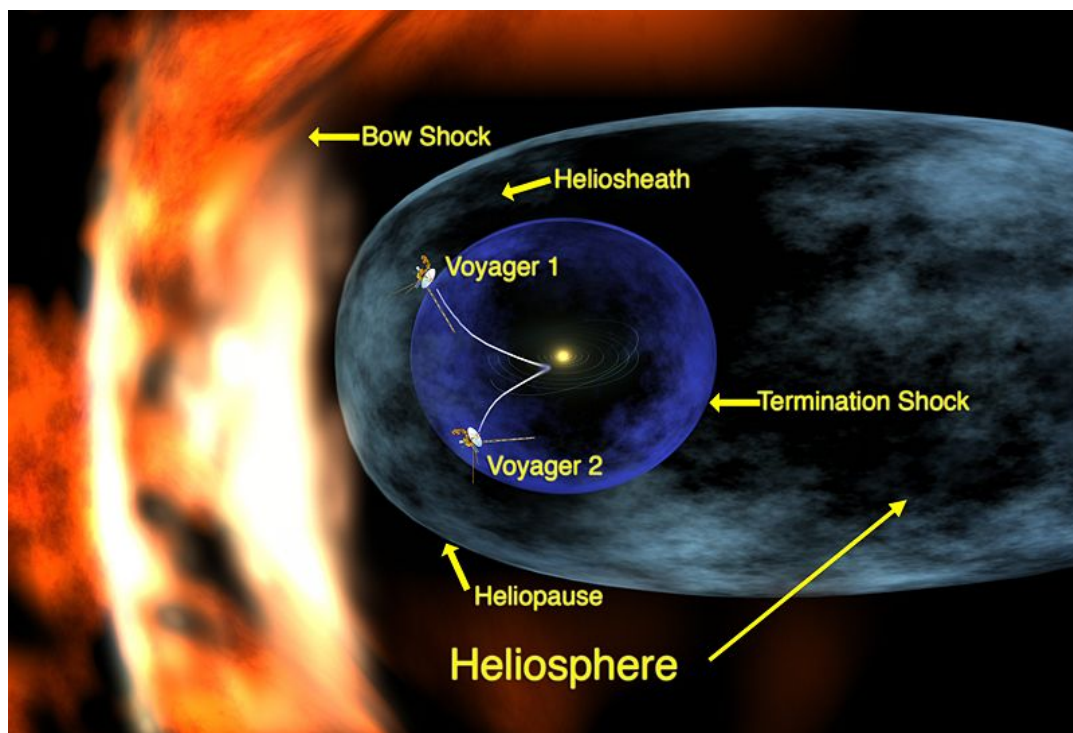


知識天地

截波現象

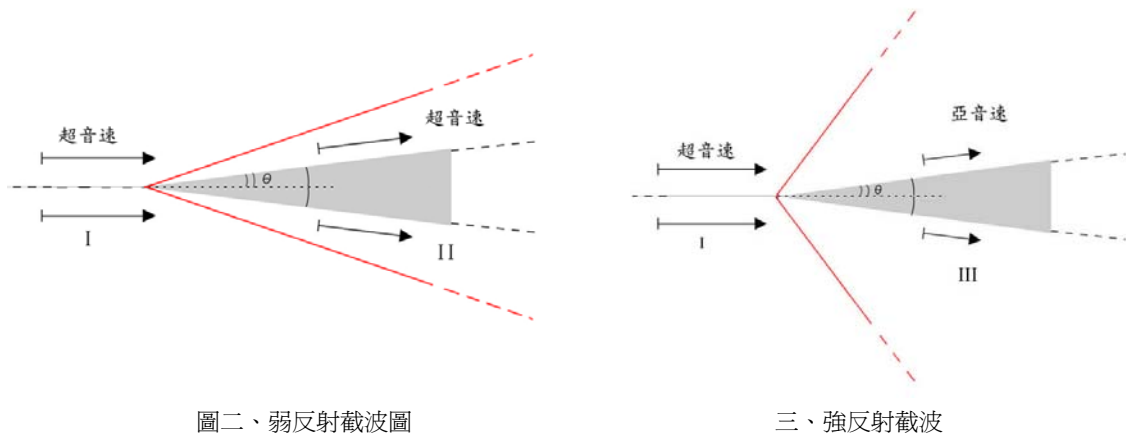
劉太平院士（數學研究所所長）

截波（Shock Wave）是自然界經壓縮而產生的。它發生在地震、海嘯、太陽風（圖一）等現象中。



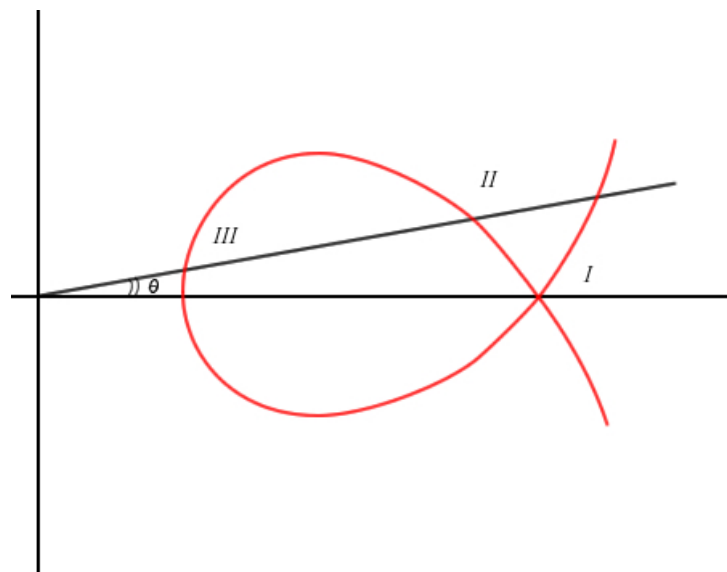
圖一、太陽風

航空工程上，瞭解截波的型態和位置是研究超音速飛行物體的一個根本課題。截波的理論上溯至十九世紀中葉，偉大應用數學家 Stokes 和幾何學家 Riemann 開其端，一個半世紀以來雖然有不斷的進展，但這個領域卻可以說歷久彌新，總有釐不清的事，主要緣故是截波理論所依附的偏微分方程是有強的非線性。非線性方程最基本的困難是兩個解的和不再是解，就如 $a^2+b^2 \neq (a+b)^2$ 。因之截波構造和預測必須就整體的解來看。1920–1930 年代德國科學家開始研究超音速飛行物體時，對截波理論提出新的看法，其中流體力學大師 Prandtl 研究以下的問題：當一個飛行物體的速度超過聲音速度（超音速）時，前面的氣體受到擠壓而產生截波。如果此物理前端是鈍的，如我們平常乘坐的飛機，或是把地球看成此飛行物體而造成的太陽風，圖一；那麼這個截波會在物體前一段距離，而截波和物體之間氣體速度頓然慢下來而小於音速（亞音速）。在亞音速的壓縮區，氣體溫度也陡然上升，壓力也變大，這些都不利於飛行。一個根本的想法是把物體前端變為尖的，這樣截波會頂在尖端。Prandtl 很快從數學上算出有兩個可能性，一個是所謂的弱反射截波，圖二；另一是強反射截波，圖三。主要的不同是：弱截波所產生的擠壓較小；截波和物體之間仍是超音速，而強截波把氣體擠壓成亞音速，使整體成繞音流。Prandtl 注意到這數學上的兩個可能性，在物理實驗上卻只看到弱反射截波。這在航空上有重要的意義，因為弱截波所產生對飛行物體的阻力較小，而物體從氣流上所受的溫度也較低。由於這個緣故，一般戰機和英法設計的超音速飛機 Concorde 的前端設計都是尖的。即便如此，當 Concorde 飛到最高速度，音速的 2.2 倍時，前端的溫度超過攝氏 120 度，必須用好的材料才行。當初波音公司有意設計超音速 4 倍的民用飛機時，就因為尖端溫度更高而所需耐溫材料為國防機密，被美國參議院否決而作罷。



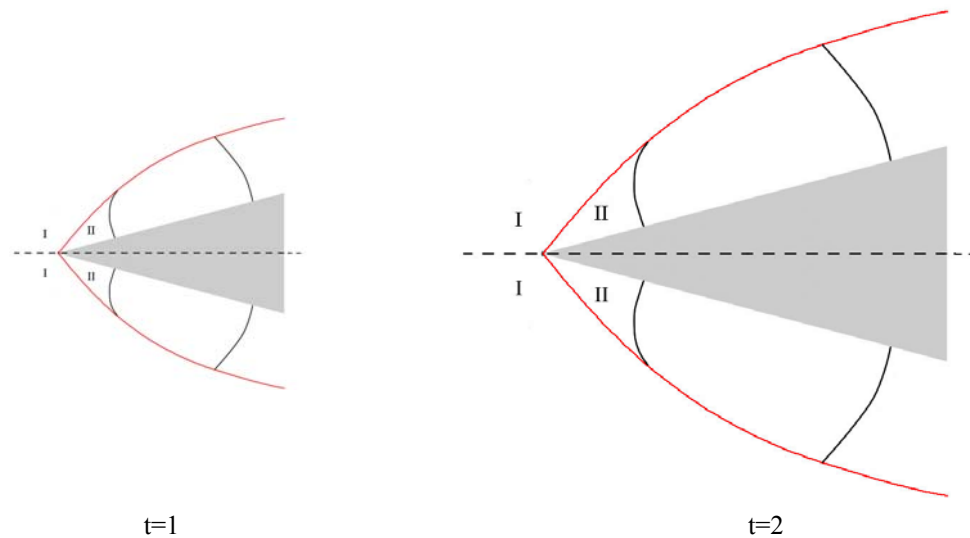
圖二、弱反射截波圖

三、強反射截波



圖四、截極曲線

Prandtl 對應用固然用心，其對基礎科學的重要性也極瞭然。Prandtl 的分析很基本，首先截波因氣體壓縮而產生，目的是使空氣會轉彎而和物體表面平行。另外，物理上基本的質量、動量、能量守恆，因此得到截波兩側的必要關係，即所謂的截極曲線，圖四；由此得到兩個相應於圖三、圖四的解。他指出有必要用數學嚴格去了解為何實驗上得到的是弱反射而不是強反射截波。約六年前一位德國博士生，他原是做數值計算的，卻專程到史丹福大學來和我做理論分析。這不尋常，一般有分析做得辛苦而去計算的。極少計算做得好而改做分析的，人各有志，誠然！那時我已大半時間在南港，（他來此就學中文，還自創圖書館叫『書們』。）我先要他用數值計算 Prandtl 猜測。終於找到這個問題的一個提法：我們做物理實驗是把一個飛行物體由速度零加速到要的超音速，而得到前端是弱反射截波。在飛機起飛加速的過程中，由亞音到超音，氣流變化是很複雜的。同樣降落減速也是整個飛行最複雜危險的時候。然而當我們專注 Prandtl 猜測時，我們其實是不去看加速過程，而是只看時間漸近狀態。或是說，在飛機起飛時，先打個盹，等上了天空再看頂端是不是弱反射截波。這也是說，我們可以把加速過程減短，而只看瞬間加速所得的尖端反射是否為弱截波。這就把一般解 $U(x, t)$ ； U 為密度、速度、能量等， x 為空間， t 為時間，換成 $U(x, t) = \psi(x/t)$ 的自似解。圖五是我們從數值計算得到靈感而用分析找到的解。解 $U(x, t)$ 滿足尤拉 (Euler) 方程，它有個特性就是流速、音速的有限，因之傳播速度有限，在數學上叫它為雙曲型方程。而尤拉方程的解為 $\psi(x/t)$ 時可以使問題減化。然而方程卻變為混合型。混合型偏微分方程，特別是非線性的，很難解。我們這個問題分析困難不少，足足花了三、四年【1】。



圖五、自似解

回到超音速 Concorde，飛機前端弱反射截波是不得已有的。另一個緊要的截波是在噴射引擎的進口，這是個強截波，有意造出來的，目的是要把引擎內的氣流變慢、變熱，好讓燃燒能夠完整些，以省油加力。為了造出這個截波，引擎前端有活動的葉片。這也有數學分析理論，【2】。

截波理論多有待加強之處，如上述飛機前端尖角不能太大方可產生弱反射截波，到底角的最大極限是什麼？又引擎葉片要緊縮多少，才能保證強截波的穩定？即如圖一的太陽風，它是由帶電流體形成的，帶電流體有快截波、慢截波，Alven 波等多類型波，圖中那個截波的型態，也到現在還沒有充份的瞭解。

數學難、有趣，因為我們想瞭解的自然現象很豐富。

【1】(Volker Elling and Tai-Ping Liu) Supersonic Flow onto a Solid Wedge, *Comm. Pure. Appl. Math*, PP.103 (to appear.)

【2】(Tai-Ping Liu) Nonlinear stability and instability of transonic flows through a nozzle, *Comm. Math. Phys.*, 83 (1982), 243-260.

※各期知識天地文章請逕於本院網頁：<http://www.sinica.edu.tw/>「常用連結」之「週報〈知識天地〉」項下瀏覽。※