

研究成果

「動力系統」的理論及數值模擬

杜寶生、周謀鴻（數學所研究員）

有人說，在 20 世紀，人類有三大發現，那就是相對論，量子力學以及混沌理論，而混沌理論是動力系統的一支，動力系統又是非線性科學的一門。由於上個世紀末葉非線性科學的蓬勃發展，使得人類自古以來認為最永恆的自然現象：定態及週期性，多加了兩位新成員：擬週期性及混沌。在此之前，科學家們對這兩種新增的現象並不陌生，只是苦於無法掌握到一個確切的描述，如前兩者那樣：「獨立而不改，週行而不殆」（本文有三處借用老子「道德經」中的語句，言簡意賅）。隨著動力系統研究的演進，確定在很多看似簡單的機制下都能見到這兩位新成員的本尊，從而引發更多數學理論的建立及一系列透過電腦的數值模擬，大大地提升了「擬週期性及混沌」在科學現象中的正統性。現在從事動力系統研究的，不僅只有數學家、物理學家，還包括了化學家、生物學家、經濟學家、氣象學家等。動力系統說難是難，但對動力系統理論有興趣的讀者，也不要因此被嚇跑，因為它也有簡單的部份，只要稍懂一些初等微積分，就能大致瞭解這些人在做些什麼。由於這個領域還在發展當中，有些概念，就像混沌概念，還未定型，說不定您有奇想或靈感，也能貢獻一些。以下我們先以直線上離散動力系統為例，做些簡介。

直線上離散動力系統的定義很簡單：假設 f 是一個從實數集對應到實數集的連續函數，隨便取一個實數 c ，我們可以計算 $f(c)$, $f(f(c))$, $f(f(f(c)))$, ..., 等等。為方便計，我們令 $f^2(c)$ 代表 $f(f(c))$ ，令 $f^3(c)$ 代表 $f(f(f(c)))$ 等等。離散動力系統的一個研究課題就是：我們能夠描述實數列 $c, f(c), f^2(c), \dots, f^n(c), \dots$ 當 n 很大時的終極表現嗎？這通常有兩種可能，一種是：太複雜了，我們無法描述，這是屬於混沌的範疇；另一種是： $f^n(c) = c$ ，也就是說， c 對 f 疊代 n 次後會回到 c 自己，我們稱這種點為週期點，並稱滿足這個方程式 $f^n(c) = c$ 的最小正整數 n 為 c (對 f) 的週期。對一般的動力系統，週期點的存在與否，是一個很吸引人的問題，因為它代表了規律性。就這一部份，我們有如下的沙可夫斯基定理。其條件之簡要，結果之豐富，堪稱數學定理的典範。

我們先給所有自然數定一個前後次序，這個次序叫做沙可夫斯基次序，其定義如下：先將所有大於一的奇數按由小而大的順序排，所以得到 3, 5, 7, ...，也就是 3 排最前面，之後為 5，再之後為 7, 9, 11 等等，然後我們把這些奇數每個都乘上 2 後再接著排，所以得到 3, 5, 7, ..., 2·3, 2·5, 2·7, ...，接下來排 2 的平方乘 3, 2 的平方乘 5, 2 的平方乘 7 等等，以此類推，最後把 2 的正整數次方按由大而小的順序排在最後，所以在最後面的數就是 ..., 32, 16, 8, 4, 2, 1。沙可夫斯基定理是說：如果 f 是一個從實數集到實數集的連續函數，且 f 有一個週期為 m 的週期點，則對於所有排在 m 後面的週期的週期點， f 都有。對於這個結果，我們有一個能讓一般修過初等微積分的大學生都看得懂的證明。這個證明利用下面這個微積分的習題：如果 a 和 b 滿足 $f(b) < a < b < f(a)$ ，則存在一個 f 的定點 z ，一個 f 的週期二的點 y ，以及一點 v 使得 $y < v < z < b = f(v)$ 且對所有滿足不等式 $y < x < v$ 的點 x ，都有 $f(x) > z$ 以及 $f^2(x) < x$ 。有興趣的讀者，可嘗試看看，先利用上述這個習題來證明： f 如有週期是奇數 k 且 $k > 1$ 的週期點，則 f 必有週期為 $k+2$ 的週期點也一定會有所有週期是偶數的週期點；之後由此就可以證得沙可夫斯基定理了。

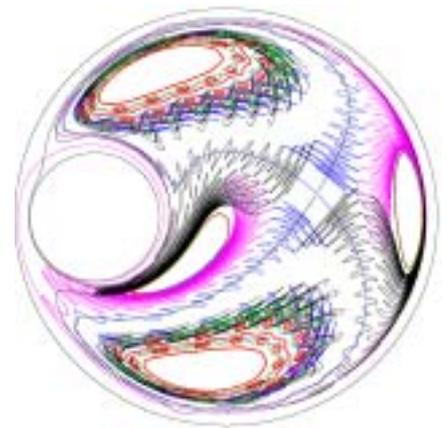
由沙可夫斯基定理可知，即使在不是很複雜的動力系統中都可找到無窮多的週期解；這種不是「寂兮寥兮」的週期現象，是混沌概念的起源之一。

接下來，我們舉個可做實驗的流體力學現象。一般有常識的人都相信，在極粘的不可壓縮流場中，極強的粘滯力會抹平任何奇怪的現象；若把這個流場看成動力系統，寫出來的微分方程式剛好也滿足古典力學的守恒律。

現在，我們把這個流場用兩個圓柱體圍成一個環形，然後輪流讓這兩個圓柱體緩慢且定速地轉動，或換句術語，加上這些邊界條件以形成一個片段可積的動力系統；同時在流場上灑些鉛粉之類的觀察標記。通常，你會看到這些觀察標記慢慢地聚成有規則的形狀；但是，在這兩個圓柱體不是同心的情況下，你也會看到有些內外圈的轉速比會讓那些觀察標記，最後變得雜亂無章，似有違常理。受過訓練的觀察者，當會懷疑其中有發生某種分歧現象。

在動力系統中，另外有個名聲響亮的 Smale-Birkhoff 定理，可用來解釋上述的困擾。這個定理所說的，是一種幾何描述，大意如下。你所看到的流場中，可能有些奇異點，而這些點的穩定流形與不穩定流形若發生糾纏，跳起了探戈，帶動了「馬蹄鐵現象」，那麼雜亂無章實屬必然，因為那就是混沌的表徵之一。想要確實體驗這種描述，包括找尋奇異點及掌握相關的流形，就得靠理論、實驗之外的第三隻眼—科學計算，以竟其功。透過嚴謹的數值模擬，我們可以清楚地看到這兩類流形，如何從縱向的密合蛻變成橫向的糾纏。

隨文附上一圖示，讓讀者感受一下我們從這個角度所看到的混沌模樣。「惚兮恍兮，其中有形；恍兮惚兮，其中有狀」。



圖右：由數個奇異點發出的穩定流形與不穩定流形間的橫向糾纏（以顏色區別）。