

研究成果

退化拋物型方程

許健明 (數學研究所研究員)

退化拋物型方程，常常出現在很多重要的物理模型中，其中一個重要的退化拋物型方程，就是多孔介質方程。多孔介質方程常出現在很多工程課題中，像石油穿過沙子，地下水穿過石頭和沙的流動問題，地下水中的污染源的擴散問題，熱和質量在核子反應器裡的擴散問題，氣體在多孔介質中的流動問題。

歐美很多大的石油公司，他們都花很多錢研究石油流過多孔介質（石頭和沙子等）的流動速度，因為這對他們開採石油的幫助很大，另外瞭解地下水的污染源的擴散速度和方向能幫助我們去做好環境保護，從這些例子中，可以知道多孔介質方程是一個很重要的研究課題。

我們現在舉一個例子，考慮理想氣體流過齊性多孔介質，氣體的流動滿足下面三個原則：

(1) 狀態方程： $P = p_0 \rho^\alpha$

其中 $P = P(x, t)$ 為壓力， $\rho = \rho(x, t)$ 為密度， $\alpha \in [1, \infty)$ 和 $p_0 \in R^+$ 為常數， $x \in R^d$ ， $d \in Z^+$ 為正整數。

(2) 質量守恆： $k \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$

其中 $\vec{v} = \vec{v}(x, t)$ 為速度向量， $k \in R^+$ 為多孔介質的多孔係數（也就是可讓氣體穿過的體積比例）。

(3) Darcy 定律： $\vec{v} = -\mu \nabla P$

其中 $\nu \in R^+$ 是氣體的黏性（viscosity）係數， $\mu \in R^+$ 是多孔介質的穿透（permeability）係數。

注意：Darcy 定律是一實驗得到的定律，它取代了常用的動量守恆定律。

要是我們在上述方程組中消去 p 和 \vec{v} 並重調 x 或時間 t 的大小，我們得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u^m = m \operatorname{div}(u^{m-1} \nabla u) \quad (1)$$

其中 $m = 1 + \alpha \neq 1$ ，因為 u 代表重調後密度，故 $u \geq 0$ ，由於方程(1)的擴散係數為 $m u^{m-1}$ ，要是 $m > 1$ 和 u 趨向無窮或零，則 $m u^{m-1}$ 將趨向無窮或零。故方程(1)為退化拋物型方程。由於上述原因，我們研究方程(1)的各種特性，包括非負解的存在性，唯一性和不唯一性，比較定理，Harnack 不等式，擴散速度，和當時間趨向無窮時解的行為等 ([H1], [H2])。有興趣的讀者，可參考 D. G. Aronson [A] 的展示性論文。

參考文獻

[A] D. G. Aronson, "The Porous Medium Equation", CIME Lectures, in Some problems in Nonlinear Diffusion, Lecture Notes in Mathematics 1224, Springer-Verlag, New York, 1986.

[H1] K. M. Hui, Singular limit of solutions of the equation $u_t = \Delta\left(\frac{u^m}{m}\right)$ as $m \rightarrow 0$, *Pacific J. Math.* 187, (1999), no. 2, 297-316.

[H2] K. M. Hui, On some Dirichlet and Cauchy problems for a singular diffusion equation, *Differential and Integral Equations* 15 (2002), no. 7, 769-804.