知識天地

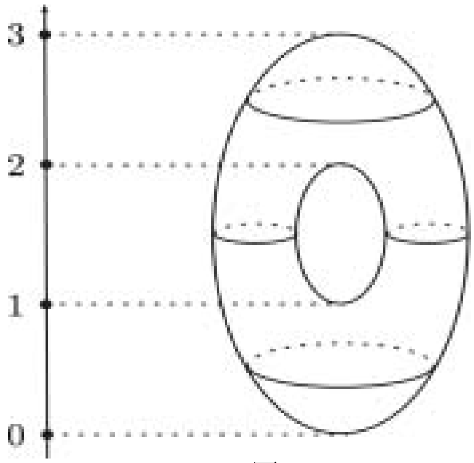
“結”論 — 非結論

謝春忠（數學研究所副研究員）

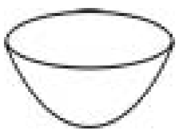
我們先回憶一下小時候的黏土遊戲（surgery），並列舉一例。

例一：我們擬用黏土塊（Building blocks）來拼成游泳圈或甜甜圈；想像該游泳圈現在置入泳池中，形如：圖一。

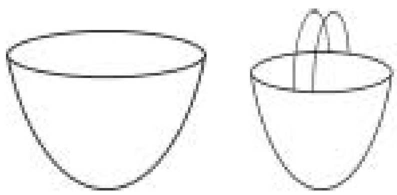
我們的黏土遊戲策略是：1.先將游泳圈置於水面上，使得游泳圈恰恰好沾了一小點的水，即水位高度是一個很小的正數。這時整個水平面下的游泳圈形如圖二。2.再加點力量下壓游泳圈，我們就發現，只要水位上升但未達高度 1 的情況；各種水平面下的部份都形如圖三。3.當水位恰恰超過高度 1 時，則水平面下的游泳圈即形如圖四。4.當水位持續上升，但都未超過高度 2 時，水平面下的部份亦都形如圖五。5.當水位恰好超過 2 時，則水平面下的游泳圈則形如圖六。6.當水位持續上升，但都未超過高度 3 時，則水平面下的部份亦都形如圖七。7.當水位恰恰達到 3 時，則整個游泳圈剛剛好浸入水中，此時整個游泳圈可視爲：圖八，像戴上帽子般。



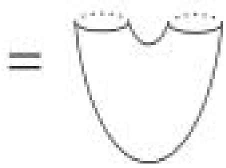
圖一



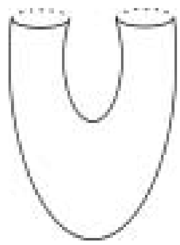
圖二



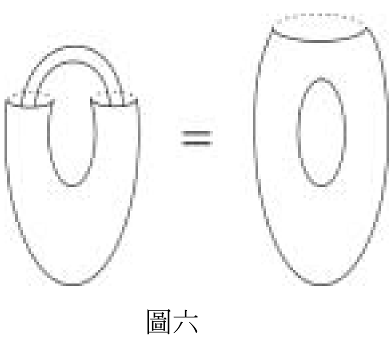
圖三



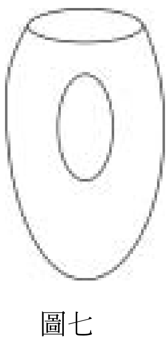
圖四



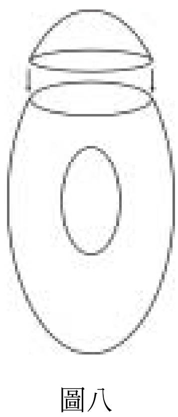
圖五



圖六

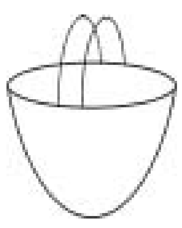


圖七

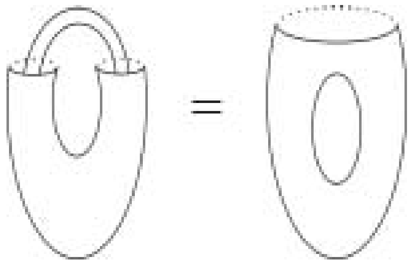


圖八

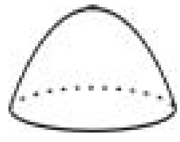
圖九



圖十



圖十一



圖十二

換言之，我們的黏土遊戲，是：(A）先取一塊黏土捏成（遊戲規則是，黏土不可拉斷，亦不可〝自己黏自己〞）圖九。(B）再取另一黏土塊，捏成長長的條狀，然後把二端黏在（A）步的黏土的邊界上，故形如圖十。(C）再取另一黏土塊，捏成長條狀，把二端黏在（B）步的黏土的邊界上，形如圖十一。(D）最後，再取一黏土塊，捏成圓帽子形狀圖十二，而把此帽沿（註：帽沿顯而易見，是一圈圈）黏在（C）步所得形狀之最上邊沿（亦是一個圈圈）。

上例看似簡單的黏土遊戲（surgery），實是近代數學（拓樸學）最前端的研究之一。同樣的黏土遊戲，可用於三維〝流形〞(manifold）之上，流形是數學專有名詞，三維流形可簡單的想成像輪胎、球等等的三維幾何圖形，而文所說的三維流形是數學家較常用的說法：無邊界的三維幾何圖形。

定理一（Wallace, Lickorish, Kirby）：任何三維〝流形（manifold）〞都可由 $\mathbb{R}^3$（或三維球，S^3 沿著一個「結（knot)」作黏土遊戲（surgery）得出。

由此，顯而易見的，我們對 $\mathbb{R}^3$ 上的結（knot）作些數學研究與探討是十分自然，且必需的。

$\mathbb{R}^3$ 上的結論（Knot theory in $\mathbb{R}^3$ ）

首先，我們談談一般拓樸學（topology）上一個重要的問題，那就是對〝流形〞作分類（classification）。但實際上，這樣的數學問題是幾乎辦不到的。為此，數學家想到了一個偷懶的方式，那就是研究這些分類的雛形，亦即〝不變量〞(invariant)；不變量學問大矣哉，我們現在只介紹與「結論」(knot theory）相關的不變量。其次，我們給出〝不變量〞的數學定義。

定義：一個實數值函數，f: {$\mathbb{R}^3$ 中之任何結}→ $\mathbb{R}$ 稱作不變量，若且唯若 f 在任一結的同價類中取同一值。而一結 K 的同價類是由 K 歷經 $\mathbb{R}^3$ 的運動所得出的所有結所成的集合。

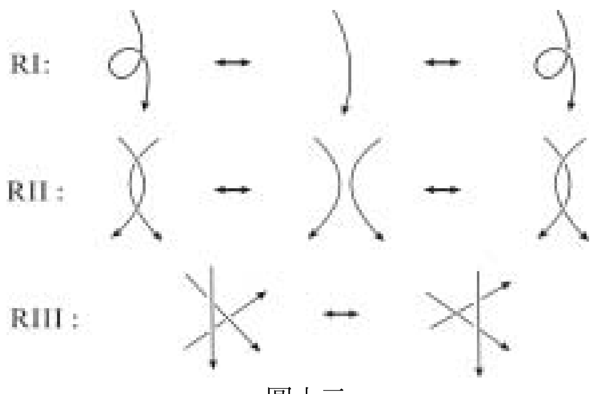
註解一：我們很容易觀察到 $\mathbb{R}^3$ 的運動，實在是不勝枚舉；所以，給定一個非常簡單的結 K，光是 K 的同價類亦同樣是多且繁雜到難以備載。

悲觀地想，不變量是天方夜譚。但我們有：

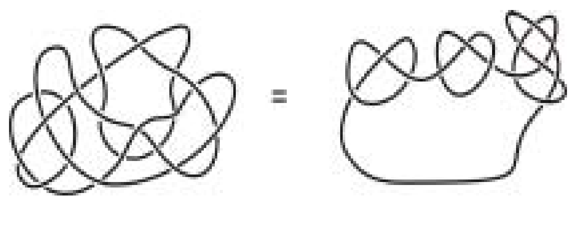
引理（Reidemeister)：上述定義中的函數 f 是不變量，若且唯若 f 在下面所列的三種運動下是不變的：圖十三。

證明：這個引理的證明是粗淺的。我們只給個暗示：想像結（knot）的平面表達（稱：knot diagram）是太陽照射下的投影。

例二：上述引理雖是粗淺，但實際操作是趣味橫生的。例舉如下：(見圖十四)。左邊的結經 RI, RII, RIII 可轉換成右結。



圖十三



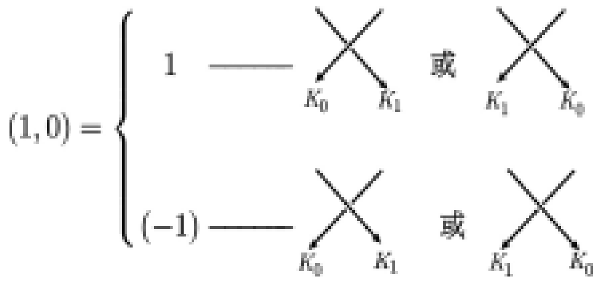
圖十四

這樣的 Reidemeister 引理雖是好看，但還是不夠具體。實言之，如何先找出一個夠資格的函數呢？亦即要能先定義出不變量函數，才能用 Reidemeister 引理來檢驗。爲此，我們提出：

定理二 (Gauss, 1777-1855)：對任一個二分量（two components）的結 $K = \{K_0, K_1\}$, 則 $L_{1,0} = \sum_{K_1 \cap K_0} (1,0)$ 是不變量（稱：高斯扣數，Gauss linking），其中 ˝$K_1 \cap K_0$˝：表示 K 在平面表達(knot diagram)下，K_1 與 K_0 的交錯處(crossing)；且交錯符號(1,0)表示：圖十五。

證明：這個定理利用上述 Reidemeister 引理，只需簡單的三分鐘操作即可證得。

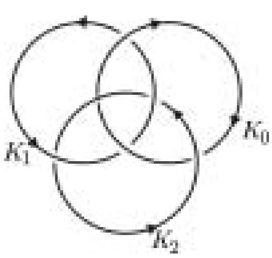
例三：上述高斯定理雖是漂亮、簡潔，但一般來說，還是有點侷限。侷限之一：它只能計算二分量的結（knots of 2 components）；侷限之二是：對三分量之結，如 Borrowmean ring $K=\{K_0, K_1, K_2\}$，圖十六，上述高斯定理並不能說出任何數學內涵：意即 $L_{i,j}=0$ for $i \neq j$，且 $i, j=0, 1, 2$。但顯而易見的是 K 的連結，相扣（linking）情況是不平凡的（non-trivial） — 意即 K 不能利用空間運動，拉開成三個彼此不相扣的圈圈。



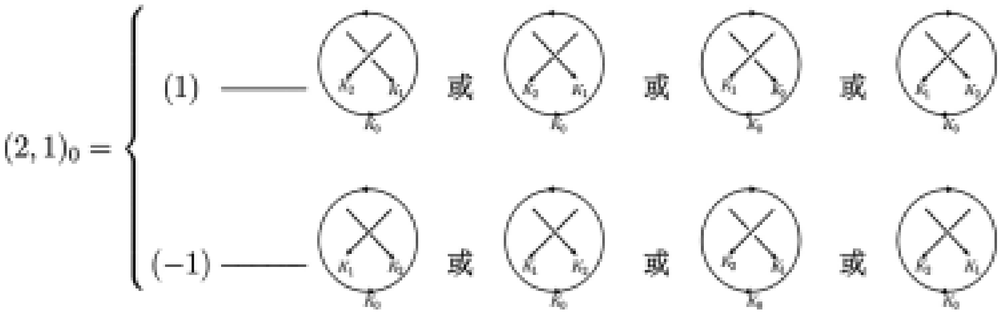
圖十五

基於如 Borrowmean ring 這樣的例子，我們擬提出一種「高階扣數」（higher linkings）的概念。例如，對如同 Borrowmean ring 樣的三分量之結 $K=\{K_0, K_1, K_2\}$；若假設任何配對的高斯扣數（Gauss linking）都等於零：$L_{i,j}=0$ for $i \neq j$, $i, j=0, 1, 2$, 則我們希望能定義出一個高階的扣數。

定理三 (Hsieh)：對任何一個三分量的結 $K=\{K_0, K_1, K_2\}$，假設任何配對高斯扣數都是零 — 亦即 $L_{i,j}=0$ for $i \neq j$, 且 $i, j=0, 1, 2$, 則 $L_{2,1,0} = (2,1)_0 + \sum_{1 \underset{0}{<} 2} (1,0)\cdot(2,0) + \sum_{2 \underset{1}{<} 0} (2,1)\cdot(0,1) + \sum_{0 \underset{2}{<} 1} (0,2)\cdot(1,2)$（稱二階扣數，linking of second degree)是不變量；其中 (i, j), 如同高斯定理，表示分量 K_i 及分量 K_j 的交錯符號，而 $1 \underset{0}{<} 2$, (或 $2 \underset{1}{<} 0$, $0 \underset{2}{<} 1$)乃是：任意選定基點(Base point) $x_0 \in K_0$, $x_1 \in K_1$, $x_2 \in K_2$ 後，視 K_0, K_1 及 K_2 如同具二基點的開線段，亦因之 K_j, $j = 0, 1, 2$ 視成 ˝全序的˝ (totally ordered), 如此 ˝$1 \underset{0}{<} 2$˝ 表示 $(1,0) =$ ˝$K_1 \cap K_0$˝ 小於 $(2,0) =$ ˝$K_2 \cap K_0$˝ — 在此，我們如同高斯定理敘述中，採用 ˝$K_i \cap K_j$˝ 符號共識。最後$(2, 1)_0$ 乃表示：圖十七。



圖十六



圖十七

證明：利用上述 Reidemeister 引理，即可。

註解二：對如同上述的三分量結 $K=\{K_0, K_1, K_2\}$，其中最重要的假設是低階扣數皆是零：$L_{i,j}=0$ for $i\neq j$ and $i, j=0, 1, 2$。所以我們稱 $L_{2,1,0}$ 是「初啓非零扣數」(first non-vanishing linking)。更甚者，這個低階零扣數假設是用於證明：$L_{2,1,0}$ 是與基點 $\{x_0, x_1, x_2\}$ 選取無關的。

註解三：這樣故事，並不止於三分量之結。亦即對任何（n+1） 分量之結 $K=\{K_0, \ldots, K_n\}$，若任何低階扣數都是零，則我們可以定義出第 n 階扣數 (linking of degree n)，不只這樣，我們還可以算出組合公式。並且這些「初啓非零扣數」(first non-vanishing linking)，還可以表達成「擾攝量子場論」中的費因曼圖之和（sums of Feynman diagrams in Perturbative quantum field theory）。

非結論

「結論」之復興乃是很晚近的事，尤其是「結論」與物理之關連，更是近代物理與數學之當前課題。大抵上，整個理論還是很不成熟的。有鑑於此，以下，列出本人對此支近代數學一些不成熟之註解（非結論），以作爲本文之結論。

一、時下流行的「結論」，乃肇基於 Jones 所發現的多項式不變量（polynomial invariant）及其相關之物理意義。但至今尚欠缺的是：仍然找不出這些多項式不變量的拓樸意義。

二、一般而言，擾攝量子場量中的費因曼圖都是算不出來的。上述的「初啓非零扣數」(first non-vanishing linking) 可在費因曼圖的計算上提供一些助益。

三、同上所述，我們只會定義並計算「初啓非零扣數（first non-vanishing linking)」。

現在問：一般扣數（linking） 如何定義？如何計算？之前，W. Massey 及 J. Milnor 定義出一些相關概念，可惜發展很是有限。

四、最後，還是要問「初啓非零扣數（first non-vanishing linking)」如何在一般多項式不變量中出現？

五、Jones 的多項式不變量（Polynomial invariant）引發更多類似的研究，其中較一般性的不變量，稱〝全宇不變量〞（universal invariant）。此類不變量，雖代數、物理意義清楚，但拓樸內涵仍待研究探討。

六、用線性代數的對偶（Duality）觀點來看「結論」。把整個結（knot）的全體當做一個大集合 — 當然，最好還有其他的數學結構 — 吾人擬在此大集合上定義不變量，以進而研究結的分類問題（classification)。基於上述「初啓非零扣數」(first non-vanishing linking) 之精神，我認爲，此量子場論之費因曼圖乃扮演不錯的對偶角色；亦即，該能利用費因曼圖之線性組合來建構結的不變量。