知識天地

撞球系統淺談

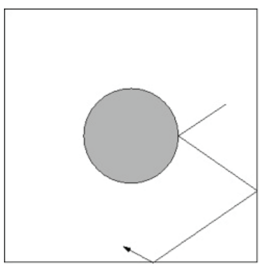
陳怡全助研究員 (數學研究所)

相信大多數人都玩過撞球，其動力學現象可以牛頓力學來描述。若假設系統為沒有熱耗散與摩擦等的理想系統，那其動力行為必須遵守眾所皆知的能量、動量及角動量守恆。這個在大一普通物理，甚至高中物理就接觸過的系統，看似簡單，其實不然。可以想像在一個光滑的正方形撞球台上擺上兩顆鋼珠，並假設系統滿足理想系統的一切條件，所以鋼珠的碰撞為彈性碰撞。問題是，當兩顆鋼珠碰撞後，人們有辦法以理論計算或者數值計算，預測在任意長時間後兩顆鋼珠的精確位置嗎？或者退而求其次，在某一小誤差範圍內的位置嗎？現今的答案是：不可能！

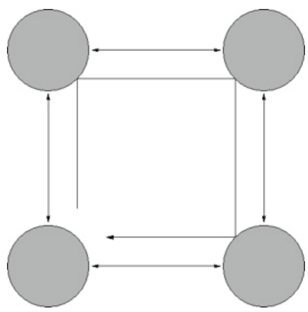
當撞球台上的鋼珠數目變為三顆、四顆、五顆等等，系統變的越來越複雜，越加束手無策。但科學家通常考慮兩個極限，一是考慮無限多顆直徑為零的小鋼珠。在此極限下，人們問一個問題，那就是可以從牛頓定律導出熱力學定律嗎？特別是，有辦法導出波茲曼的遍歷性假設嗎？也就是問，整個系統能從任一起始狀態，無論花多長的時間，在一任意小的誤差內，接近系統的另一可能狀態嗎？

另一個極限則還是考慮兩顆鋼珠，但一顆直徑為零，另一顆改成個圓形鋼盤並固定於正方形台的中心不動。於這個極限，系統相對簡單〔現稱 Sinai 系統〕。當直徑為零的那顆碰撞到固定不動的鋼盤又彈開時，其動力行為滿足反射定律，即入射角等於反射角 (圖一)。也因此，在此極限下，可想像在正方形球台與圓形鋼盤的邊緣都裝上鏡子，並把直徑為零的鋼珠當作入射光，來考慮其受到這些鏡子反射的行為。對於這個相對簡單的系統，普林斯頓大學的前蘇聯裔數學家 Sinai 於 1970 年代證明其動力行為是遍歷的。雖然他的定理離波茲曼假設還有一段距離，但其結果及後續研究，在數學的新興領域「動力系統」中，持續扮演不可或缺的角色。

(圖一)



(圖二)



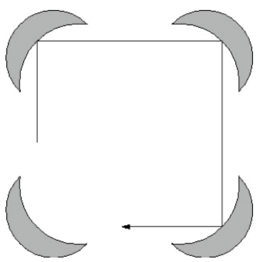
讓我們多談一點 Sinai 系統。在不失一般性下，可假設正方形球台邊長為 1，且球台中心座標為原點。事實上，我們可找無限多這樣的球台，拆掉其邊界，再將它們併在一起，所以整個平面上，所有座標為整數的位置如 (0, 0)，(-1, 2)，(100, 99) 等等，都有一個固定的圓形小鋼盤。這樣所建構的新系統，稱為 Lorentz 系統，為研究固體物理所提出的模型。由於對稱性，Lorentz 系統與 Sinai 系統是等價的。對於 Lorentz 系統，科學家通常好奇一件事：若一個點粒子與某一小鋼盤碰撞反彈後，或許會、也或許不會再碰撞到另一小鋼盤，那這個點粒子最後會跑到無限遠嗎？答案是也許會，也許不會，端視此粒子與鋼盤相撞的位置與角度而定。另一個困難的問題是，如果隨機地放一堆小粒子，那這些粒子擴散的速率是多少？

Sinai 或 Lorentz 系統的動力學機制是碰撞，其動力學行為取決於碰撞的位置與角度。讓我們考慮 Lorentz 系統的一個子系統，即只考慮四個小鋼盤的影響，其餘的都不考慮。假設這四個小鋼盤的圓心座標分別為 (0, 0)，(0, 1)，(1, 0) 與 (1, 1)。為方便起見，分別命名此四個鋼盤為 A，B，C 與 D。對於此子

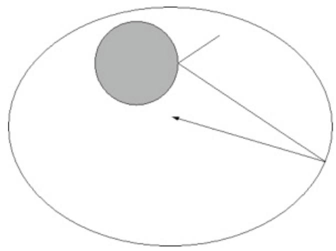
系統，我們可問比較細節的問題。例如，此系統有週期軌跡嗎？這問題的答案很顯然是有，因為點粒子可來回不斷碰撞 A 與 B。為描述方便，我們標記此週期軌跡為 $\overline{AB}$〔意味 AB 循環〕。同樣地，此系統也有 $\overline{AC}$ 、$\overline{AD}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{BD}$ 及 $\overline{CD}$ 的週期軌跡。再者，稍微仔細觀察也可發現，系統有標記為 $\overline{ABCD}$ 的週期軌跡（圖二）。有個值得注意的事實是，點粒子碰撞到某一鋼盤之後，不是永遠不再撞到該鋼盤，就是在再次撞到該鋼盤之前，必須先至少撞到其它的鋼盤一次，所以不可能存在有軌跡其標記包含 AA、BB、CC 或 DD 的字串。對於這個由 A、B、C、D 四個鋼盤所組成的系統，一個數學上的漂亮定理如下：任給一由 A、B、C、D 所組成的無限序列，若其中沒有連續兩個 A、B、C 或 D，則存在有點粒子軌跡，其標記恰為該序列，並且該軌跡是唯一的。

例如可創造一序列如下：先重複一百萬次 AB，再接 CD，然後再重複 AB 一百萬次，再接 CD，如此不斷重複。則存在有唯一的一個週期軌跡，也就是存在有唯一的一個起始位置與角度，使得點粒子來回碰撞 A 與 B 鋼盤一百萬次後，接著碰 C 盤，再碰 D 盤。而後又再度來回碰撞 A 與 B 鋼盤一百萬次，然後再接著碰撞 C 與 D 鋼盤，如此不斷重複。

（圖三）



（圖四）



如果四個鋼盤不是圓的而是橢圓的，這個存在與唯一性的定理仍然是對的；但如果是如圖三的新月形狀，則就不再為真。兩者最大的差異，在於碰撞時接觸點的曲率，一個是正的，另一個則是負的。以動力學機制來說，正曲率的鏡子將平行光散射，而負曲率的鏡子先將平行光聚焦後再分散。所以當碰撞接觸點的曲率是負的時，動力學現象是非常複雜的。至於平的鏡子〔即曲率為零〕，由於平行光反射之後還是平行光，所以並不會增加系統的複雜度。

說到複雜度，那複雜度如何度量呢？傳統上，熱力學中度量複雜度的物理量是熵 (entropy)。基於相似的想法，在數學的動力系統研究領域中，也定義有所謂的拓樸熵 (topological entropy)。其數學定義無需在此詳述，但在本文中可理解成，它是用來度量週期軌跡的數目隨週期數增加的速率。舉例來說，方才提到的由四個圓鋼盤與一個點粒子所組成的系統有 12 (=4*3) 個二週期軌跡：$\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 、$\overline{AD}$ 、$\overline{BA}$ 、$\overline{BC}$ 、$\overline{BD}$、$\overline{CA}$ 、$\overline{CB}$ 、$\overline{CD}$ 、$\overline{DA}$ 、$\overline{DB}$ 及 $\overline{DC}$〔這裡我們將 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BA}$ 當作不同軌跡〕，有 36 (=4*3*3）個三週期軌跡，還有 108 (=4*3*3*3）個四週期軌跡。以此類推，有 4*3^(N-1) 個 N 週期軌跡，所以系統的拓樸熵為 ln3。

那 Sinai 系統的拓樸熵是多少呢？答案是無限大！

讓我們再回到波茲曼假設，因為在立方體形狀的教室內，與在橢球體形狀的小巨蛋內的氣體熱力學並無不同，所以很自然地人們會問一個問題：如果把 Sinai 系統的撞球台的邊緣，改成橢圓形的（圖四），那新系統的拓樸熵是多少呢？這個問題的困難之處，在於當點粒子碰撞到內部圓鋼盤時接觸點的曲率為正，而碰撞到球台邊緣時接觸點的曲率為負，所以很難評估正與負所生的效應。筆者最近的研究成果給了

個定性的回答，定理是：一般而言，只要內部圓鋼盤是足夠地小，新系統的拓樸熵可以是任意的大。

撞球好玩，但玩的時候需要聚精會神。撞球的數學也好玩，問題簡單，但答案可不簡單；動力機制簡單，但動力現象非常複雜，非常混沌。

相關文獻：

【1】Ya. G. Sinai 1970 Dynamical systems with elastic reflections. *Russian Math. Surveys* 25 137-189.

【2】Yi-Chiuan Chen 2010 On topological entropy of billiard tables with small inner scatterers. *Advances in Mathematics* 224 432-460.