

知識天地

拓樸學簡介—從歐拉示性數談起

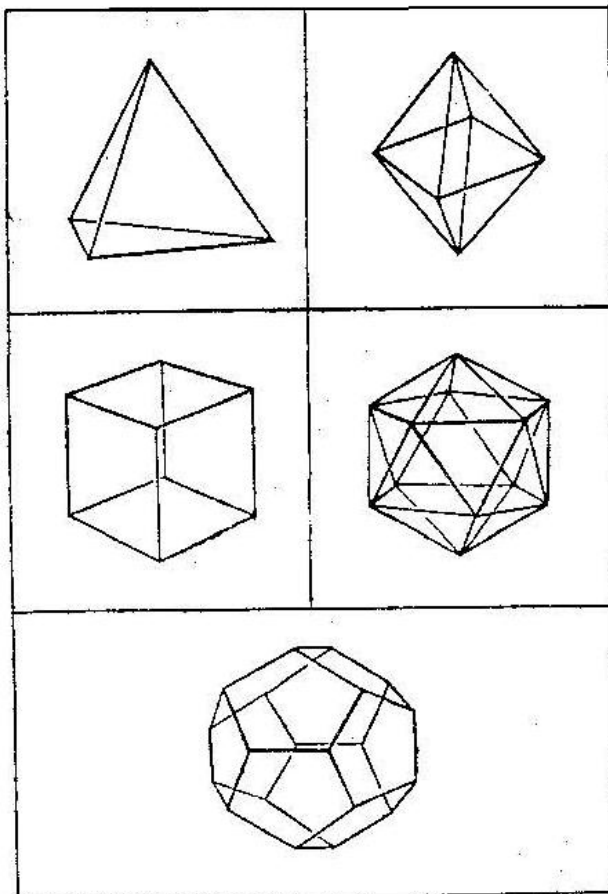
鄭日新研究員（數學研究所）

大家可能聽過簡單多面體的歐拉公式： $V-E+F=2$ ，其中 V 表頂點的個數， E 表邊的個數， F 表面的個數。這多面體的面可以是任意的多邊形。要點是簡單多面體的“簡單”是什麼意思？圖一給個“非簡單”的多面體，大家再算一下它的點線面交錯和得到 0，就不是 2 了。關鍵在哪呢？我們後來知道所附圖中的多面體有個穿過其身的“洞”，這是造成它不同於“簡單”多面體的關鍵。用較嚴格的話說，簡單多面體就是可以連續變形（不能拉斷）為球面的多面體，所附圖中的多面體可以連續變形為輪胎面，輪胎面並不能連續變形為球面，拓樸學上說輪胎面與球面拓樸不同所以點線面交錯和 $V-E+F$ 不同，一般拓樸相同（即可以相互連續變形）的多面體便會有相同的點線面交錯和 $V-E+F$ ，我們叫此拓樸不變量為歐拉示性數。

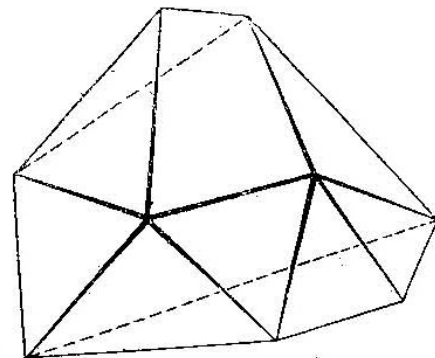
大家可能聽過空間中有五種正多面體：正 4，6，8，12，20 面體。為什麼沒聽過其他的正多面體，如正 10 或 16 面體。因為其他的不能存在，證明就要用到簡單多面體的歐拉公式： $V-E+F=2$ ，這公式加上正多面體的頂邊個數，面邊個數關係給了正多面體的頂，邊，面數很大限制。

給一閉曲面（黏土），我們把它捏成（不能拉斷）一個任意的多面體，其歐拉示性數總是相同，事實上，對（可定向）閉曲面而言，歐拉示性數是唯一的拓樸不變量，就是說，兩個此種曲面拓樸相同（即可以相互連續變形）若且唯若其歐拉示性數相同。

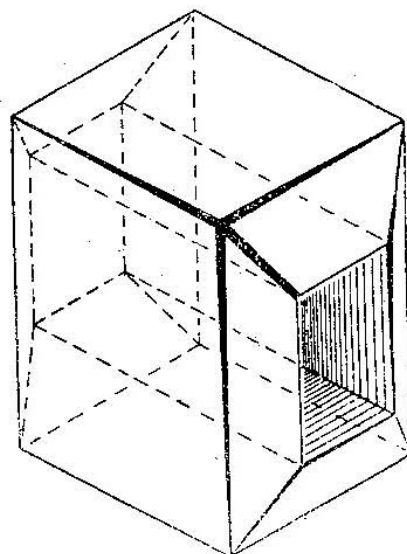
閉曲面上若考慮切向量場，其為 0 之點叫奇點。（孤立）奇點個數之（某種代數）和，可證明即曲面的歐拉示性數，這是著名的 Hopf 標數定理，我們常說頭髮最多只有兩個“漩”，因為有 Hopf 標數定理且頭表面的歐拉示性數為 2。



正多面體。



簡單的多面體。 $V-E+F=9-18+11=2$ 。



非簡單的多面體。 $V-E+F=16-32+16=0$ 。

閉曲面的歐拉示性數另有一積分表達式，把曲面上每一點的曲率（測度曲面彎曲程度的量）疊加起來取平均。這就是出名的 Gauss-Bonnet 定理。這是微分幾何中第一個漂亮的大域定理。西元 1944 年陳省身院士運用對聯絡巧妙的纖維叢理解給出一個內蘊的證明，他的方法同時重證了 Hopf 標數定理及 Gauss-Bonnet 定理。

歐拉示性數的進一步發展是理解成某個幾何型橢圓算子的指標，Atiyah-Singer 指標定理以橢圓算子理論併入 Gauss-Bonnet, Riemann-Roch 等有名的定理為其特例。Atiyah-Singer 指標定理將我們對大域微分幾何的了解推進到一個新的境界。不過，故事還沒完。隨著尖端量子物理的發展，場量子化已是理論的必需，其用來表達的語言是費因曼的路徑積分，同時，為了理論的圓滿，物理學家也引入了超對稱，超空間等的觀念。

歐拉示性數再度理解為重力場中運動自旋粒子量子化後基態—基態期望值（vacuum-vacuum expectation value）。這值可用超空間上的路徑積分表達。透過超空間上路徑積分的操作，我們事實上重證了 Gauss-Bonnet 定理。場量子化後基態—基態期望值的概念透過 Witten 的工作涵蓋了許多精細的拓樸不變量，發展出所謂的“拓樸場論”。另一方面，為了回答四維時空上（nonabelian）規範場（當然是量子化後）的質量（mass gap）是什麼等基本問題，建立嚴格的費因曼積分理論乃是不能逃避的數學工作，時間好像回到 Laurent Schwartz 為了嚴格化 δ 函數發展廣義函數理論之前的年代，誰會是下一個 Laurent Schwartz 呢？

“超對稱與指標定理”參考資料：

1. L. Alvarez-Gaume, *Supersymmetry and the Atiyah-Singer Index Theorem*, Commun. Math. Phys. 90 (1983) 161-173. (物理式的證明)
2. A. Rogers, *A superspace path integral proof of the Gauss-Bonnet-Chern theorem*, JGP, Vol.4, no. 4, 1987 (嚴格的證明，須超空間費因曼—Kac 公式)

“規範場的質量是什麼”參考資料

1. E. Witten, *Physical law and the quest for mathematical understanding*, Bulletin of the A.M.S., Vol. 40, No.1, pp. 21-29, electronically published on Oct. 9, 2002.
2. 高涌泉, B_μ 場的質量是什麼? 數學傳播 100, 第 25 卷, 第四期, 頁 21-25。

※各期知識天地文章請逕於本院網頁：<http://www.sinica.edu.tw/> 「常用連結」之「週報〈知識天地〉」項下瀏覽。※