

# 知識天地

## 常均曲率曲面

梁惠禎副研究員 (數學研究所)

考慮 $\mathbb{R}^3$ 中之曲面 $S$ ，過 $S$ 上某點之所有曲線中，有兩曲線分別具最大及最小之曲率 $\kappa_1$ 、 $\kappa_2$ ，稱其平均值 $(\kappa_1 + \kappa_2)/2$ 為 $S$ 在該點之均曲率。若 $S$ 上所有點都具有相同之均曲率，則稱 $S$ 為常均曲率曲面；球面是廣為人知的例子。常均曲率曲面緣起於等周界問題。本文將分別探討無邊界及有邊界之曲面。有邊界之曲面又分兩類討論：給定邊界曲線者、給定邊界與支撐面接觸角之毛細曲面。

球面上的點另具重要性質： $\kappa_1 = \kappa_2$ 。一般曲面 $S$ 上具此性質的點稱為umbilical point (臍點)。若 $S$ 的每一點都為umbilical point，則稱 $S$ 為umbilical。第III節中將論及常均曲率曲面與umbilical曲面之可能關聯。

**I. 緣起。**手執切面為圓的吸管，置其一端 $\Gamma_1$ 入肥皂溶液後抽出，有一平坦之肥皂膜附著於 $\Gamma_1$ ，為一圓盤。於吸管另一端 $\Gamma_2$ 灌入空氣，則圓盤變形為附著於 $\Gamma_1$ 之肥皂泡。以一手指底於 $\Gamma_2$ 內部，使空氣無從逃逸，則此肥皂泡成形成為spherical cap。稍事擾動肥皂泡使之變形但仍附著於 $\Gamma_1$ ，且擾動過程中一手指始終底於 $\Gamma_2$ 內部，則停止擾動後，肥皂泡復為spherical cap。

肥皂泡可視為分隔兩均勻介質之界面。在無重力狀態，界面之能量與面積成正比，而肥皂泡取得最小能量。上述肥皂泡的建構，另受制於兩個因素：肥皂泡之邊界固定為 $\Gamma_1$ ，且肥皂泡與吸管所包夾的空氣量為固定。在這兩個限制下擾動曲面，肥皂泡取得面積的極小值。因此肥皂泡是下述變分問題的解，其解為spherical cap：

**問題1：**給定常數 $V$ 及平面 $P$ 上之圓 $\Gamma$ 。通過 $\Gamma$ 且與 $P$ 包夾體積 $V$ 的所有曲面中，何者面積最小？

在前述實驗，如果持續灌空氣入吸管，肥皂泡終將脫離吸管，成為完整球面。此時，肥皂泡滿足的限制僅剩一個，在體積限制下要取得面積之最小值。換言之，球面是下述古典等周界問題的解：

**問題2：**體積固定的所有封閉曲面中，何者面積最小？

將面積視為曲面之函數，考慮體積維持恆定之曲面微小變動，則面積函數針對這些變動之臨界點為常均曲率曲面。換一觀點來看，考慮分隔兩介質之界面 $S$ ，忽略 $S$ 的厚度，界面 $S$ 承受之內外壓力差 $P_e - P_i$ 與曲面張力 $\gamma$ 成正比，而 $S$ 之形狀由Laplace equation決定： $P_e - P_i = 2H\beta$ ，其中 $H$ 為 $S$ 之均曲率， $\beta$ 是介質所決定之常數；當壓力恆定， $S$ 之均曲率為常數。肥皂膜、肥皂泡及毛細曲面皆屬此型界面。因此，我們把上述二問題分別轉化如下：

**問題1.1:** 給定常數 $H$ 及封閉曲線 $\Gamma$ ，通過 $\Gamma$ 且均曲率為常數 $H$ 之曲面是否存在？是否不只一個？

**問題2.1:** 封閉的常均曲率曲面一定是球面嗎？

**II. 先看問題2.1。**1853年J.H. Jellet 證明球面是唯一的star-shaped常均曲率曲面。1900年H. Liebermann證明卵形的常均曲率曲面必為球面。半個世紀後，H. Hopf賦與常均曲率曲面一holomorphic differential 2-form，於1951年證明：

**定理1.** genus為0的封閉常均曲率曲面必為球面。

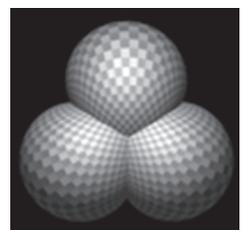
1956至1962年間，A.D. Alexandrov證明：

**定理2.** 嵌入的 (embedded) 封閉常均曲率曲面必為球面。

Alexandrov的證明，結合曲面對平面的反射及橢圓方程的maximum principle，至今仍是微分幾何及偏微分方程領域之重要技巧。1984年J.L. Barbosa及M. do Carmo證明：

**定理3.** 穩定的封閉常均曲率曲面必為球面。

直至八零年代，球面是唯一為人所周知的封閉常均曲率曲面。1986年，H.C. Wente證明某個常均曲率immersed環面的存在性，石破天驚，激起了尋找封閉常均曲率曲面之風潮，至今未衰。而Wente的技巧，建立起常均曲率曲面與可積系統之關聯，致使常均曲率環面能被深入探討。



1991-1992年，N. Kapouleas對任意genus構造出封閉的immersed常均曲率曲面。Kapouleas黏合球面及Delaunay旋轉曲面（1838年C.E. Delaunay發現一族常均曲率旋轉體，包括圓柱面、懸垂面、unduloid、nodoid），其關鍵是要在黏合處做擾動使其平滑；此構造方法迄今仍廣被採用。近日，另有學派結合loop groups與可積系統的理論，發展出DPM method以構造常均曲率曲面。諸多網站以電腦繪圖展示相關的豐碩成果，譬如<http://www.gang.umass.edu>。

III. 回到問題1.1，給定常數 $H$ 及封閉曲線 $\Gamma$ ，要尋找曲面 $M=X(\overline{B_1})$ 滿足下述事項，其中 $X:\overline{B_1}\rightarrow\mathbb{R}^3$ ,  $X=X(u,v)$ ， $B_1$ 為 $\mathbb{R}^2$ 中之單位圓：

$$\begin{cases} \Delta X = 2H (X_u \times X_v) & \text{on } B_1, \\ |X_u|^2 - |X_v|^2 = \langle X_u, X_v \rangle = 0 & \text{on } B_1, \\ X: \partial B_1 \rightarrow \Gamma & \text{a homeomorphism.} \end{cases}$$

J. Douglas及T. Rado處理了 $H=0$ 的情況，Douglas並因此而於1936年獲頒費爾茲獎。五零年代，E. Heinz開始探討 $H\neq 0$ 的情況，至七零年代，多位數學家考慮變分問題的解而於 $H$ 夠小時尋獲曲面 $M=X(\overline{B_1})$ ：在 $H=0$ 時，以Dirichlet integral

$$D(X) = \frac{1}{2} \int_{B_1} |\nabla X|^2 dudv$$

取代面積 $A(X) = \int_{B_1} |X_u \times X_v| dudv$ （因為 $A(X) \leq D(X)$ ），在 $H\neq 0$ 時，考慮

$$D_H(X) = D(X) + \frac{2H}{3} \int_{B_1} \langle X_u \times X_v, X \rangle dudv,$$

並考慮由定義於 $B_1$ 且通過 $\Gamma$ 之immersions所組成之族群 $C(\Gamma)$ ；與 $C(\Gamma)$ 之成員相較，曲面 $M=X(\overline{B_1})$ 最小化 $D_H(X)$ 。 $D_H(X)$ 的第二項中， $\frac{1}{3} \int_{B_1} \langle X_u \times X_v, X \rangle dudv$ 是曲面 $X(u,v)$ 相對於原點的algebraic volume，而 $2H$ 可視為為Lagrange multiplier（但未給定 $C(\Gamma)$ 成員之體積值）。 $M=X(\overline{B_1})$ 是藉由變分學之direct method尋獲， $M=X(\overline{B_1})$ 是 $D_H(X)$ 之minimizing sequence收斂所至之極限；此中關鍵是要利用 $C(\Gamma)$ 的緊緻性及 $D_H(X)$ 之lower semicontinuity證明minimizing sequence收斂。

八零年代，H. Brezis，J.M. Coron及M. Struwe處理 $C(\Gamma)$ 在mountain pass level的緊緻性，確認了問題1.1的解若存在必定不唯一：若 $D_H(X)$ 在 $C(\Gamma)$ 能被 $X$ 最小化，則在 $C(\Gamma)$ 中必定存在另一不穩定的解；譬如，若 $\Gamma$ 是圓，通過 $\Gamma$ 的常均曲率曲面至少有圓盤及一大一小兩個spherical caps。事實上，即使 $\Gamma$ 是圓，對問題1.1的解，我們所知仍甚少。有兩個確認的事實：

1. 通過圓的緊緻umbilical曲面必為圓盤或spherical caps。
2. 通過圓的緊緻旋轉曲面必為圓盤或spherical caps。

另外，Kapouleas於1991年證明存在通過圓而不具旋轉對稱之緊緻常均曲率曲面；此曲面有自相交(self-intersections)，genus大於1，坐落於邊界平面所決定的某半空間。迄今未有該曲面之電腦繪圖，此與封閉常均曲率曲面電腦繪圖量之豐沛大相逕庭。衡諸這些事實，對照前述三定理，我們做以下三猜測：

- 猜測1. 通過圓的immersed常均曲率曲面，若genus為0，必為umbilical。
- 猜測2. 通過圓的常均曲率曲面，若為嵌入的，必是umbilical。
- 猜測3. 通過圓的常均曲率曲面，若為穩定，必是umbilical。

IV. 可將問題1.1考慮的曲面限制為平面區域上的函數圖形，改述問題如下：

問題1.2: 給定常數 $H$ 及空間中之封閉曲線 $\Gamma$ ，是否存在函數圖形通過 $\Gamma$ 且均曲率為 $H$ ？

此問題中之 $\Gamma$ 必為某平面曲線上之函數圖形，因此可重新陳述問題如下：

問題1.3: 給定常數 $H$ ，定義域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ， $\phi: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ，尋找平滑函數 $u$ 使得

$$\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = 2H \text{ on } \Omega \tag{1}$$

$$u = \varphi \text{ along } \partial\Omega \tag{2}$$

其中 $\nabla$ 及 $\operatorname{div}$ 分別為 $\mathbb{R}^2$ 中之梯度及divergence算子。

用divergence theorem積分(1)，得到此問題有解之必要條件： $|H| \leq \frac{|\partial\Omega|}{2|\Omega|}$ ，其中 $|\partial\Omega|$ 及 $|\Omega|$ 分別為 $\partial\Omega$ 的長度及 $\Omega$ 的面積。當 $\Omega$ 為半徑 $r$ 的圓，此必要條件是 $|H| \leq 1/r$ 。事實上，R. Finn於1965年證明：

定理4. 若 $H \neq 0$ 且 $\Omega$ 包含半徑 $1/|H|$ 的圓，此問題的解必為半球。

R. Finn也同時證明了下述結果：

定理5. 當 $H=0$ ，問題1.3對任意連續邊界值 $\phi$ 都有解之充要條件是 $\Omega$ 為凸。

對一般 $H$ ，J. Serrin於1969年證明：

定理6. 設 $\Omega$ 為有界凸域。問題1.3對任意連續邊界值 $\phi$ 都有解之充要條件是平面曲線 $\partial\Omega$ 之曲率 $\kappa \geq 2H$ 。

在偏微分方程領域，問題1.3因其邊界條件(2)而被歸類為Dirichlet problem。因(1)為擬線性二階橢圓方程，通常運用Leray-Schauder theory求解：先假設解 $u$ 存在，估計 $|u|$ 及 $|\nabla u|$ ，若兩者皆存在與 $u$ 無關的上界，則解存在。

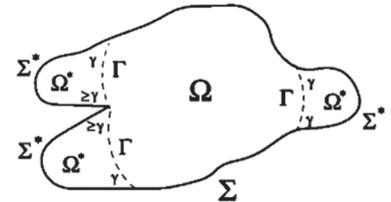
**V. 現考慮毛細曲面。**無重力狀態下，將水平切面為 $\Omega$ 的試管鉛直插入溶液槽，溶液因毛細作用而附著於試管上升，形成毛細曲面 $s$ ，具常均曲率，與試管壁相交於一曲線，沿此曲線 $s$ 與管壁之交角恆常不變。因此，有別於(2)，我們考慮如下之邊界條件

$$\left\langle \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}, \nu \right\rangle = \cos \gamma \text{ along } \partial\Omega, \tag{3}$$

其中 $\nu$ 是 $\partial\Omega$ 指向 $\Omega$ 內部之單位法向量。設(1)-(3)有解 $u$ ，則在試管 $\Omega \times \mathbb{R}$ 內，溶液於 $(x,y) \in \Omega$ 點升起的高度是 $z=u(x,y)$ ，而由(3)知 $u$ 的函數圖形與管壁 $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ 之交角恆為 $\gamma$ 。

處理(1)-(3)解的存在性，端賴E. de Giorgi及其同儕發展出的BV theory。考慮子區域 $\Omega^* \subset \Omega$ ，邊界

$\partial\Omega^* = \Gamma \cup \Sigma^*$ ，其中 $\Sigma^* \subset \partial\Omega = \Sigma$ ， $\Gamma \subset \Omega$ 是半徑 $\frac{|\Omega|}{|\Sigma|} \cos \gamma$ 的圓弧，在 $\Sigma$ 的平滑點 $\Gamma$ 與 $\Sigma$ 之交角為 $\gamma$ ，而在 $\Sigma$ 的凹角 $\Gamma$ 與 $\Sigma$ 之交角 $\geq \gamma$ 。對此型子區域 $\Omega^*$ ，考慮函數 $\Phi(\Omega^*; \gamma) := |\Gamma| - |\Sigma^*| \cos \gamma + |\Sigma| \cos \gamma \frac{|\Omega^*|}{|\Omega|}$ ，七零年代Giusti及Finn證得：

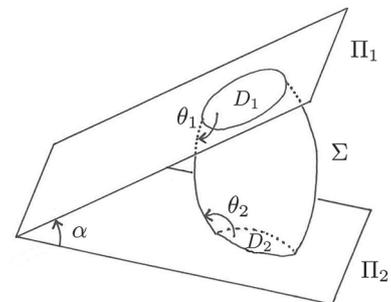


定理7. (1)-(3)解存在之充要條件是此型子區域 $\Omega^*$ 都滿足 $\Phi(\Omega^*; \gamma) > 0$ 。

在一般 $\Omega$ ，此型子區域 $\Omega^*$ 為數有限，甚或不存在。若 $\Omega^*$ 不存在，上述充要條件成立，因此解存在；而若 $\Omega^*$ 有數個，則一一計算其 $\Phi$ 值。P. Concus及Finn循此策略證得：

定理8. 若 $\partial\Omega$ 包含某突出的角，角弧度 $2\alpha$ ， $\alpha + \gamma < \pi/2$ ，則(1)-(3)無解。

廣義來說，與某支撐面有恆定交角的曲面都被稱為毛細曲面，而稱該交角為接觸角(contact angle)。考慮兩個平面包夾的楔形區域，McCuan及Park分別於1997及2005年證明



定理9. 楔形區域內，嵌入之環形毛細曲面必為球面的一部分。

我們可考慮下述三問題；

問題1：楔形區域或半空間內，是否存在緊緻、immersed且不是部分球面的的毛細曲面？

問題2：楔形區域或半空間內，是否存在緊緻、嵌入且 $\text{genus} \geq 1$ 的毛細曲面？

問題3：楔形區域或半空間內，穩定之毛細曲面是否必為部分球面？

相關於問題1，Wente於1995年建構了楔形區域內非緊緻的毛細曲面。關於問題2，在接觸角 $\leq \pi/2$ 的情況，McCuan於1997年證明問題所述之毛細曲面不存在。關於問題1，在接觸角 $\geq \pi/2$ 且毛細面邊界為嵌入曲線的情況，J. Choe及M. Koiso於2006年證明穩定之毛細面必為球的一部分。三個問題都尚待更完整的解答。