知識天地

組合數列的單峰型問題

王毅（大連理工大學應用數學系教授）、葉永南（本院數學研究所研究員）

組合數列分佈性質的研究是組合數學中最原始最基本的問題之一，其中最為人們所關注的分佈性質是單峰型問題，包括單峰性（unimodality）、對數凹性（log-concavity）和 PF（Polya frequency）性質等。設 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 是一個正數數列。如果 $a_0 \le a_1 \le \ldots \le a_{m-1} \le a_m \ge a_{m+1} \ge \ldots \ge a_n$，則稱之為單峰數列（$m$ 稱為該數列的 mode）；如果對所有 $1 \le i \le n-1$ 有 $a_{i-1}a_{i+1} \le a_i^2$，則稱之為對數凹數列；如果發生函數 $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ 的根均為實數，則稱之為 PF 數列(PF 性質的刻畫實際上有很深的背景[Kar68])。這些性質彼此之間也有密切關係，例如 PF 性質蘊涵對數凹性，而對數凹性蘊涵單峰性。最常見的組合數列幾乎都有某種或某幾種單峰性質，例如二項式係數、兩類 Stirling 數、Eulerian 數等均具有單峰性、對數凹性和 PF 性質。儘管定義簡單，但組合數列的單峰型性質的證明常常是件很困難的事情[Bre89]，這使得單峰型問題的研究既具有趣味性又具有挑戰性。

單峰型問題的研究有著悠久的歷史，例如在十九世紀 Sylvester 就已運用不變數理論來證明 q-二項式係數(作為 q 的多項式)的係數形成一個單峰數列。在組合、分析、代數、數論、幾何、概率論等數學分支以及電腦科學、經濟學和統計學等學科中都常常會遇到數列的單峰型問題（實際上，單峰型問題的研究最早出現在統計學中），因此對組合數列的單峰型問題一直為人們所關注。然而由於缺乏系統的處理方法和問題本身的難度，單峰型問題的研究成果大多是一些孤立的結果，一個問題的解決往往需要構造一種特殊的技巧，許多經典問題仍然無從下手。例如 Read 關於有限圖的色多項式（更一般的，擬陣的特徵多項式）係數的單峰性和 Rota 關於有限幾何格的 Whitney 數的單峰性。1986 年著名數學家 R. Stanley（MIT 教授，美國國家科學院院士，2006 年 Madrid 國際數學家大會一小時報告人）給出了第一篇研究單峰型問題的綜述[Sta89]，其後單峰型問題更加吸引了組合學家的注意，各種精細的工具和艱深的技巧也開始迅速發展，包括來自經典分析、線性代數與有限群、代數幾何、Lie 代數的表示理論和對稱函數理論的各種手段。眾多傑出組合學家的參與，極大推動了單峰型問題研究的發展，其中最引人注意的工作當屬 MIT 學派，例如 Brenti 的博士論文[Bre89]于 1989 年全文發表於 Memoirs Amer. Math. Soc.。對於一個數學研究目標，一個自然的研究途徑是考慮它的不變算子。Brenti 以 TP 理論（the theory of total positivity）為工具，較為系統地找出了保持 PF 性質不變的一些線性算子。他也指出對於對數凹性和單峰性，相應的不變算子很少因而這樣的問題是困難的。此後十幾年的發展證明確實如此。

下面報告我們最近在單峰型問題研究上取得的一些成果和相關的評價。

1. 關於 PF 性質研究方面的工作。設 $f(x) = \alpha\prod_{i=1}^{m}(x - r_i)$，$g(x) = \beta\prod_{j=1}^{n}(x - s_j)$，其中 $\alpha\beta > 0$，$n \le m \le n+1$，$r_1 \ge s_1 \ge r_2 \ge s_2 \ge \ldots$。我們證明瞭如果 $ad \ge bc$，則多項式 $(bx+a)f(x) + (dx+c)g(x)$ 的零點均為實數。作為一個推論，設非負實數三角 $\{a(n,k)\}_{0 \le k \le n}$ 滿足遞迴關係

$$a(n,k) = (rn + sk + t)a(n-1,k-1) + (r'n + s'k + c')a(n-1,k),$$

其中 $a(n,k) = 0$ 除非 $0 \le k \le n$。如果 $rs' \ge sr'$ 且 $(r+s+t)s' \ge (r'+t')s$，則 $a(n,0), a(n,1), \ldots, a(n,n)$ 均為 PF 數列。許多著名組合數列的 PF 性質可由此一併得到。例如，熟知二項式係數 $b(n,k)$、第一類（無符號）Stirling 數 $c(n,k)$、第二類 Stirling 數 $S(n,k)$、古典 Eulerian 數 $A(n,k)$ 分別滿足遞迴關係

$$
\begin{aligned}
b(n,k) &= b(n-1,k-1) + b(n-1,k),\\
c(n,k) &= c(n-1,k-1) + (n-1)c(n-1,k),\\
S(n,k) &= S(n-1,k-1) + kS(n-1,k),\\
A(n,k) &= (n-k+1)A(n-1,k-1) + kA(n-1,k).
\end{aligned}
$$

於是這些數列均具有 PF 性質，從而具有對數凹性和單峰性。相關論文[WYjcta05]被《J. Combin. Theory Ser. A》審稿人認爲是近十年該領域最主要的結果(The result in this paper is a solid contribution to this area. It unifies a good number of previously known results. …This is not only result of this form, but certainly the main result in the last ten year or so. … It is remarkable that the final result is so simple and clean. This is also a nice feature: it is extremely easy to apply.)。

2. 關於對數凹性研究方面的工作。給定非負實數三角$\{a(n,k)\}_{0\le k\le n}$，令$A_r(n;q)=\sum_{k=r}^{n}a(n,k)q^k$。如果對每個正整數$r$，$A_r^{\,2}(n;q)-A_r(n-1;q)A_r(n+1,q)$作爲$q$的多項式有非負的係數，那麼就說$\{a(n,k)\}_{0\le k\le n}$是 LC-positivity 。如果$\{a(n,k)\}_{0\le k\le n}$和$\{a(n,n-k)\}_{0\le k\le n}$均爲 LC-positivity， 那麼就說$\{a(n,k)\}_{0\le k\le n}$是 double LC-positivity。組合學中最基本的常數三角 (即$a(n,k)\equiv 1$)和 Pascal 三角(即$a(n,k)=b(n,k)$爲二項式係數)均是 double LC-positivity。我們證明瞭如果$\{a(n,k)\}_{0\le k\le n}$是 LC-positivity 並且$z_n=\sum_{k=0}^{n}a(n,k)x_k$，那麼序列$\{x_k\}$的對數凹性蘊涵序列$\{z_n\}$的對數凹性；如果$\{a(n,k)\}_{0\le k\le n}$是 double LC-positivity 並且$z_n=\sum_{k=0}^{n}a(n,k)x_k y_{n-k}$，那麼序列$\{x_k\}$和$\{y_k\}$的對數凹性蘊涵序列$\{z_n\}$的對數凹性。這個結果能有效判斷保持對數凹性質不變的線性和雙線性變換，是 Brenti 的方法和以往的方法難於做到或做不到的；它也能對著名概率論專家 Liggett 關於 Pemantle 猜想的困難證明給出實質性的解釋和推廣，相關論文[WYjcta07]被《J. Combin. Theory Ser. A》審稿人認爲是該領域最激動人心的成果之一 (This is an exciting paper. … The contribution in this paper definitely ranks as one of the most exciting that I have seen since the origins of this subject. … These are reasonably ingenious and innovative.)。

3. 關於單峰性研究方面的工作。設$p(x)=a_0+a_1x+\dots+a_mx^m$，其中$0\le a_0\le a_1\le\dots\le a_m$， Alvarez 等猜想對任意正實數$d$,多項式$p(x+d)$的係數是單峰的。我們證明瞭這個猜想並研究了這個單峰數列的 mode 的個數和位置 [WYeujc05]。這個工作被《European J. Combin.》審稿人認爲是原創性的，因爲這方面的問題通常難於下手因而系統的結果是很罕見的（General methods for proving unimodality are especially rare and valuable, and results about the mode of unimodal polynomials are usually harder and even rarer.… The proof is simple, elegant, not difficult, but original. In fact, the idea of the proof could very well be used in other similar situations. The proof of the mode result is considerably more complicated and technical, and the result is surprisingly precise.）。該文在《European J. Combin.》的 ScienceDirect TOP25 Hottest Articles 曾名列榜首。

關於單峰型問題的其他一些最新結果，參考[Bra06, CS07, Fisk06，MW06, LW06, LW07]。