知識天地

可積哈密頓系統

謝　仲副研究員（數學研究所）

實際上在日常生活或自然現象中，我們常用方程式來描述現象，爲了瞭解現象我們試著將方程式的解求出來，並將解盡可能以簡單的方式表現出來。

當我們在運動場上，看到一顆足球在滾動，你可能會說這顆足球直接的滾向球門。當你想對這顆球的運動做出較精確的描述，也許你會記錄出這顆球隨時間的消逝而做出的位置、速度、加速度……的變化，將這些變化的相互牽連寫出來，就成了描述這顆球的運動系統方程式。

因此對於一個系統是否可解出來，也是瞭解一個系統的重要指標。從傳統的觀點，我們大都是透過積方的方式（integration by quadrature）得到系統的解，因此很多時候，我們說一個系統是可積的系統（integrable system），也就意味著，這個系統可確解（exactly solvable system）。從古早以來數學家對於尋找可積系統一直非常感興趣，藉助可積系統的研究，用來描述古典系統和量子系統是理論物理的數學核心。

去尋找一個一致性的可積性的定義是非常困難的。尤拉（Euler）和拉格朗日（Lagrange）建立了牛頓力學的數學架構，雅可比（Jacobi）將費瑪（Fermat）最少時間原則（Fermat’s principle of least time）和哈密頓（Hamilton）最小運動（least action）的觀念運用在動態系統，得到了哈密頓動態系統（Hamiltonian System）表示法。在這個架構下，我們可以探討劉維爾（Liouville）有關可積性的想法。我們將不從數學或物理學的角度去嚴謹的切入，而從一般常識性或直覺性用類比的方式去看，在這個想法後面我們想表達的是什麼。

一般來說在辛流形上的一個光滑函數 H 可以用來定義一個哈密頓系統，通常這個函數稱爲哈密頓函數或能量函數。我們可想像這個函數描述了在相空間上的能量或訊息的分佈。由這些量分佈的強弱，我們可定出一個特殊的哈密頓相量場（Hamiltonian vector field），由微分方程理論，我們可在相空間上導出一個哈密頓流（Hamilton flow）。對於一個在相空間上，不是一成不變的函數 F（非常數函數），在沿著每一條哈密頓流取值的時候都是定值，這個函數就稱爲這個哈密頓系統的首次積分（first integral）。你可以想像爲 F 所代表的是能量或訊息，當沿著固定的哈密頓流，它的強度或大小不會有所改變。

從微分方程的理論，我們知道可以利用已知的首次積分，來減少系統的複雜情況，而得到一個新的系統，就像是猜謎或拼圖。線索愈多謎底的範圍也就愈小，愈容易猜，被拼出來的圖片越多，拼圖的難度，也就相對的降低。

從前面有關哈密頓流的敘述，我們知道在一個辛流形上的任兩個光滑函數 F 和 G，都可訂出自己的哈密頓系統。如果 F 函數是 G 哈密頓系統的一個首次積分，那麼 G 函數也是 H 哈密頓系統的一個首次積分，也就是他們間存在一個對稱的關係。因此在這個辛流形上，我們稱這兩個函數 G 和 F 爲互相對合（involution）。我們可以想像爲一個人從 A 點出發，沿過 A 點的 F 哈密頓流走了 t1 時間，再從那兒沿 G 哈密頓流走了 t2 時間到達 B 點，和先從 A 點沿過 A 點的 G 哈密頓流走 t2 時間，再從那兒沿 F 哈密頓流走 t1 時間，一樣可以到達 B 點，有時我們稱這種情況是可交換（commute）

我們前面已提到，每知道一個首次積分，就可以使系統變得簡單一點，但是到底需要多少知訊，我們才可以對系統完全瞭解。由於哈密頓系統的特殊性結構，1855 年劉維爾證明了，對於一個具有 n 個自由度的哈密頓系統（相空間爲 2n），如果存在 n 個獨立並且互對合的首次積分，那麼這個系統可用求積法得出。也就是說如果能知道 n 個沒有重複的訊息，我們就可以對系統完全瞭解。我們也由此知道一個哈密頓系統，在什麼條件可被稱爲一個可積的哈密頓系統。像是簡諧運動、橢圓體上的測地線、旋轉的陀螺……等，都是已知的可積哈密頓系統。同時尋找獨立並且相互對合的首次積分也變成研究可積系統的一個重要課題，像是逆散射理論（inverse scattering）、賴可司對（Lax pair）……。

數學的各個領域不是獨立的，而是盤根錯節的，像是關於可積性的研究發展出了彭拉夫檢測（Painleve test）；應用黎曼-希伯特問題（Riemann Hilbert problem）、正交多項式（orthogonal polynomial）、隨機矩陣（random matrices）去解決可積性的問題；對於無限維空間，需要多少首次積分才夠說一個哈密頓系統是可積系統；無限多環體（tori）可如何定義，是否在黎曼曲面（Riemann surface）上的一些重要性質，也能在無限多環體上展現……？

參考資料

Arnold, V. I. Mathematical methods of classical mechanics. Graduate Texts in Mathematics 60 Springer Verlag 1984
Baik, J. ... [et al.] Integrable systems and random matrices. American Mathematical Society, 2008
Courant R. & D. Hilbert　Methods of Mathematical Physics. Vol. I, II Wiley 1989
Conte, R, & M. Musette The Painleve Handbook. Springer Verlag 2008
Mckean, H. P.　Integrable Systems and Algebraic Curves. Lecture Notes in Mathematics 755 1980 pp. 83 – 200
Zakharov, V.　What Is Integrability? Springer Verlag 1991